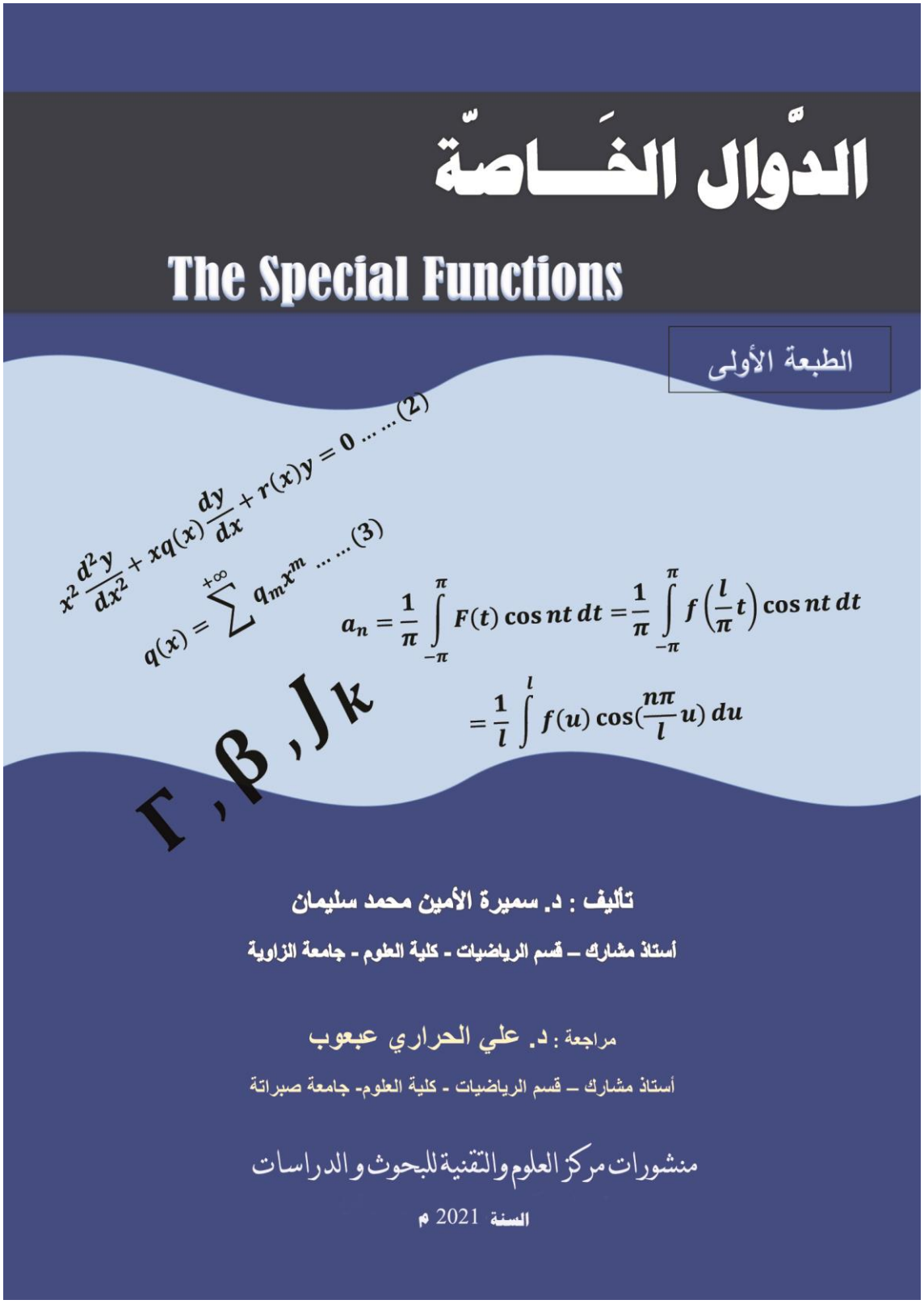

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الدوال الخاصة

The Special Functions

Γ , β , J_k

تأليف : د. سميرة الأمين محمد سليمان

الطبعة الأولى

2021 م

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الدوال الخاصة

تأليف : د. سميرة الأمين محمد سليمان

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم- جامعة الزاوية

مراجعة : د. علي الحراري عبعوب

أستاذ مشارك – قسم الرياضيات

كلية العلوم- جامعة صبراتة

الطبعة الأولى

منشورات مركز العلوم والتقنية للبحوث و الدراسات

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بسم الله الرحمن الرحيم

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

تم إعداد جزء من هذا الكتاب في فترة الإجازة العلمية

للعام الجامعي 2017-2018

للدكتورة

د. سميرة الأمين محمد سليمان

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

جدول المحتويات

مقدمة..... 9

بسم الله الرحمن الرحيم..... 9

الجزء الأول..... 11

(First Part)..... 11

الفصل الأول..... 12

حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة فروبينوس 12

method Frobenius Solution of the differential equations by..... 12

1.1. طريقة فروبينوس(Frobenius method) 13

1.2. أمثلة (Examples) 22

1.3. تمارين (Exercises) 40

الفصل الثاني..... 41

متسلسلات فورييه 41

مقدمة عامة عن متسلسلات فورييه 42

1.2 متسلسلات فورييه (Fourier Series) 42

ملاحظات هامة عند حل التكامل لحساب المعاملات an, bn : 43

2.2-متسلسلات الجيب لفورييه (Sinus series of Fourier) : 45

3.2. متسلسلات جيب التمام لفورييه (Cosines series of Fourier): 45

نظرية 1.2 : المتطابقات الآتية صحيحة : 46

4.2. الصيغة التكاملية للمجموع الجزئي لمتسلسلة فورييه : 47

نظرية 2.2 : إذا حققت الدالة f كلاً من الشرطين الآتيين : 48

5.2.مفكوك دالة دورية دورها $2l$: 51

6.2. أمثلة : (Examples) 52

7.2.الصيغة العقدية لمتسلسلات فورييه (complex formula of Fourier series): 55

8.2. تمارين : (Exercises) 59

الفصل الثالث (Chapter Three)..... 61

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

دوال جاما و بيتا 61

Gamma and Beta functions 61

1.3. دالة جاما: (Gamma function) 62

1.1.3. بعض خواص دالة جاما (Some properties of Gamma function) 63

ملاحظة : من الخاصية 2 أعلاه يمكن كتابة الدالة جاما بالشكل الآتي : 64

الإثبات : من تعريف دالة جاما : 65

2.1.3. أمثلة : (Examples) 67

2.3. دالة بيتا: (Beta function) 68

1.2.3.بعض خواص دالة بيتا : (Some properties of Beta function) 69

1- الدالة بيتا هي دالة متماثلة (symmetric function) 69

2- لدينا الخاصية الآتية : 70

3- الخاصية الآتية توضح العلاقة بين دالة بيتا و دالة جاما : 70

2.2.3 .تطبيقات : (Applications) 71

3.3. تمارين : (Exercises) 74

الفصل الرابع Chapter Four 76

التحويلات التكاملية 76

Integral transformations 76

1.4. مقدمة عامة عن التحويلات التكاملية 77

2.4. تحويل فورييه : (Fourier transform) 77

نظرية 1 : 78

نظرية 2 : 79

3.4. تطبيقات (Applications) 84

4.4. تحويل فورييه للدوال الزوجية (Fourier transform for even functions): 90

5.4. تحويل فورييه للدوال الفردية (Fourier transform for odd functions): 92

6.4.أمثلة (Examples): 94

نظرية 3: 101

7.4. تحويل فورييه للمشتقات : (Fourier transform for the derivative) 102

أولاً : تحويل فورييه للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو : إذا كانت f' قابلة للتكامل فإن : 102

ثانياً : تحويل فورييه للمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ هو : إذا كانت f'' قابلة للتكامل فإن : 103

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

ثالثاً : تحويل فوريه الجيبي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو 103
رابعا : تحويل فوريه الجيبي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو : 104
8.4. تحويل لابلاس (Laplace transform) : 107
نظرية 5 : 109
نظرية 6 112
1.8.4. تحويل لابلاس للمشتقات (Laplace transform for the derivatives) 112
أولاً : تحويل لابلاس للمشتقة الأولى 112
ثانياً : تحويل لابلاس للمشتقة الثانية 112
2.8.4. أمثلة (Examples): 114
9.4. تحويل ميلين (Mellin transform): 118
بعض خواص تحويل ميلين: 120
10.4. تمارين (Exercises) : 121

الفصل الخامس 123

دوال بيسيل 123

Bessel's functions 123

1.5. معادلة بيسيل التفاضلية : (Bessel 's Differential Equation) 124
2.5. العلاقات التكرارية لدوال بيسيل(Recurrence Relations for Bessel functions) 130
3.5. التابع المولد لدوال بيسيل : (Generating function for Bessel functions) 132
برهان العلاقة التكرارية (e): 134
برهان العلاقة التكرارية (f): 135
4.5. القيم الذاتية و الدوال الذاتية: (Eigenvalues and eigen functions) 136
5.5. التمثيل التكاملي لدوال بيسيل 138
(The integral representation of Bessel functions): 138
6.5. أمثلة (Examples) : 140
7.5. تمارين (Exercises) 143

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، والشكر لله سبحانه وتعالى أن تكرم علينا وتفضل بجمعنا على فكرة وضع هذا الكتاب، وتحديد مداه، ثم تنسيق معلوماته وإخراجها هذا المخرج المبارك إن شاء الله تعالى.
وعم ً بقوله صلى الله عليه وسلم: (**لا يشكر الله من لا يشكر الناس**) فالشكر أولا وأخيرًا لله رب العالمين أن تكرم سبحانه وتعالى علينا بإتمام هذا الكتاب المفيد، ثم أجزل الشكر والتقدير مع فائق العرفان لكل من ساهم وساعد في إخراج هذا السفر للنور.

نستهل هذه المقدمة بنبذة عن الدوال الخاصة (special functions). الدوال الخاصة هي دوال شائعة الظهور عند حل الكثير من مسائل الرياضيات والهندسة، وتلعب دوراً هاماً في نظرية تقريب الدوال, بالإضافة إلى ذلك فإن الدوال الخاصة تمتلك من المهارات والآليات الرياضية الفائقة القدرة على التبسيط والاختصار، فهي التي تسهم بطريقة رائعة في تسهيل الكثير من الحسابات العلمية الصعبة والمعقدة وتقدم طريقة ناجحة جداً لتوفير الوقت والجهد.

نظراً لأهمية الدوال الخاصة في الرياضيات، لذلك قسم هذا الكتاب إلى جزئين. في الجزء الأول سنقوم بدراسة بعض هذه الدوال الخاصة مثل دوال جاما (Gamma Functions) ودوال بيتا (Beta Functions) ، وكذلك ندرس دوال بيسيل (Bessel Functions) من النوع الأول ومن النوع الثاني، قبل كل ذلك سوف ندرس أولا طريقة فروبينوس لحل المعادلات التفاضلية و كذلك متسلسلات فورييه و بعض التحويلات التكاملية مثل تحويل فورييه، تحويل لابلاس و تحويل ميلين. أخيرا نتطرق إلى دراسة دوال بيسيل .ولذلك قسم الجزء الأول إلى خمسة فصول أساسية . الفصل الأول يتضمن دراسة حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة فروبينوس وبعض الأمثلة التوضيحية لذلك.

في الفصل الثاني فقد تم دراسة متسلسلات فورييه .أما الفصل الثالث فيتضمن دراسة دوال جاما وبيتا وكذلك بعض الخواص الأساسية و أيضا بعض تطبيقات التكامل باستخدام هذه الدوال.

في الفصل الرابع سوف ندرس بعض التحويلات التكاملية مثل تحويل فورييه (Fourier transform)، تحويل لابلاس (Laplace transform) وتحويل ميلين (Mellin transform).

و أخيرا سوف ندرس دوال بيسيل (Bessel functions) في الفصل الخامس . و في نهاية كل فصل من الفصول السابقة نقدم مجموعة من التمارين لتمكين الطالب من الفهم الجيد لمحتويات هذا الكتاب.

في الجزء الثاني من هذا الكتاب سوف ندرس بعض كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

- كثيرات حدود ليجندر (Legendre Polynomials).
- كثيرات حدود لاغير(**Laguerre** polynomials).
- كثيرات حدود هيرمايت (**Hermite** polynomials).
- كثيرات حدود تشيبيشف من النوع الأول ومن النوع الثاني.
(Chebyshev polynomials of first and second type).

لقد بدأ الاهتمام بدراسة كثيرات الحدود المتعامدة و التعمق فيها منذ بداية القرن التاسع عشر ميلادي من خلال دراسة تشيبيشف للكسور الجزئية المتصلة. منذ ذلك الوقت وقع الكشف عن العديد من التطبيقات لها في العديد من المجالات الرياضية و المسائل الفيزيائية مع التقديم المفصل لبعض خصائصها. لقد استخدمنا لإثبات هذه الخصائص الهامة أدوات تقنية وطرق تتعلق بالتحليل والجبر الخطي. كما قدمنا أيضا بعض الملاحظات الهامة التي تتعلق بجميع كثيرات الحدود المتعامدة.

وأسال الله أن أكون قد وفقت في إعداد هذا الكتاب والله ولي التوفيق .

مؤلفة الكتـــــــــــــــاب

د. سميرة الأمين محمد سليمـــــــــــــــان

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الجزء الأول (First Part)

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الأول (Chapter One)

حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة فروبينوس

Solution of the differential equations by Frobenius method

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الأول (Chapter One)

حل المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة فروبينوس

Solution of the differential equations by Frobenius method

1.1. طريقة فروبينوس (Frobenius method)

ندرس في هذا البند المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية التي تأخذ الشكل :

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \quad (1)$$

سوف نركز دراستنا أولاً على المعادلة

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xq(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \quad (2)$$

حيث $q(x)$ و $r(x)$ تكتب في صورة متسلسلات قوى في x

$$q(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}q_m x^m \quad (3)$$

$$r(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}r_m x^m \quad (4)$$

بحيث تكون هذه المتسلسلات متقاربة.

ثم ندرس حالة خاصة من المعادلة (1) أى عندما $p(x)=1, q(x)=-x, r(x)=-1$ و أخيرا ندرس مسألة القيم الابتدائية التي تتكون من معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى مع شرط ابتدائي.

طريقة فروبينوس تتلخص في إيجاد حل المعادلة (2) الذي يكتب في صورة

$$y(x,s)=x^s(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^{s+n} \quad (5)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

حيث $c_0 \neq 0$. من المعادلة (5) لدينا

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)x^{s+n-1} \qquad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}7 \qquad (7)$$

بوضع العلاقتين (6) و (7) في العلاقة (2) ينتج أن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n} + q(x)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)x^{s+n} + r(x)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{s+n} = 0$$

بالتعويض عن متسلسلات القوى $q(x)$ و $r(x)$ كما في المعادلتين (3) و (4) و حذف معاملات x^s نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} c_n q_m(s+n)x^{n+m} + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} c_n r_m x^{n+m} = 0 \qquad (8)$$

لكى تتحقق هذه المساواة يجب أن تكون جميع معاملات قوى x مساوية للصفر و ذلك كالآتي : معاملات x^0 التي نحصل عليها بوضع $n = 0, m = 0$ تكون مساوية للصفر أي:

$$c_0 s(s-1) + c_0 q_0 s + c_0 r_0 = 0 \qquad (9)$$

معاملات x نحصل عليها من المعادلة (8) بوضع $n = 1$ في المجموع الأول وفي المجموع الثاني والثالث نضع $n + m = 1$ $(i.e\ n = 1, m = 0 \text{ or } n = 0, m = 1)$ أي:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$c_1(s+1)s + c_1q_0(s+1) + c_0q_1s + c_1r_0 + c_0r_1 = 0 \qquad (10)$$

و هكذا يتم تعميم الحالة أعلاه لأجل معاملات x^i التي تكون مساوية للصفر و التي نحصل عليها من المعادلة (8) بوضع $n = i$ في المجموع الأول وفي المجموع الثاني و الثالث نضع $n + m = i,$

(أي أن $n = i, m = 0$ أو $n = i-1, m = 1$ أو $n = i-2, m = 2$ حتى الى

$$(n = 0, m = i$$

نحصل علي

$$\begin{aligned} & c_i(s+i)(s+i-1) \\ & \quad + \{c_iq_0(s+i) + c_{i-1}q_1(s+i-1) \\ & \quad + c_{i-2}q_2(s+i-2) + \cdots c_0q_is\} \\ & \quad + \{c_ir_0 + c_{i-1}r_1 + \cdots c_0r_i\} = 0, \quad i \geq 1 \end{aligned} \qquad (11)$$

بتجميع حدود c_i ووضع

$$f(s+i) = (s+i)(s+i-1) + q_0(s+i) + r_0 \qquad (12)$$

نحصل على

$$\begin{aligned} & c_if(s+i) + \{c_{i-1}q_1(s+i-1) + c_{i-2}q_2(s+i-2) + \cdots \\ & \quad + c_0q_is\} + \{c_{i-1}r_1 + c_{i-2}r_2 + \cdots c_0r_i\} = 0, \quad i \geq 1 \end{aligned} \qquad (13)$$

المعادلة (9) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$c_0\{s^2 + (q_0 - 1)s + r_0\} = 0 \qquad (14)$$

حيث إن $c_0 \neq 0$ فإن

$$s^2 + (q_0 - 1)s + r_0 = 0 \qquad (15)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

تسمى المعادلة (15) بالمعادلة المميزة و هي معادلة تربيعية و بذلك يكون لها جذران s_1, s_2 و ليكن $s_2 \geq s_1$

نلاحظ أن المعادلة (15) هى نفسها $f(s) = 0$ و بذلك يكون لدينا

$$f(s) = (s - s_1)(s - s_2) \qquad (16)$$

هاتين القيمتين لـ s تؤديان إلى الحلول المستقلة للمعادلة التفاضلية الأصلية و ذلك يكون محقق في حالتين:

الحالة الأولى : عندما تكون جذور المعادلة المميزة متساوية

الحالة الثانية : عندما يكون الفرق بين جذور المعادلة المميزة عدد صحيح.

الأن بوضع $i = 1$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$c_1 f(s+1) + c_0 q_1 s + c_0 r_1 = 0$$

$$\Longrightarrow c_1 = \frac{-c_0(q_1 s + r_1)}{f(s+1)} = \frac{-c_0 h_1(s)}{f(s+1)} \qquad (17)$$

حيث $h_1(s) = q_1 s + r_1$ متعددة حدود في s من الدرجة n.

و عندما $i = 2$ في المعادلة (13) نحصل على :

$$c_2 f(s+2) + \{c_1 q_1 (s+1) + c_0 q_2 s\} + \{c_1 r_1 + c_0 r_2\} = 0$$

بالتعويض عن قيمة c_1 من المعادلة (17) نحصل على :

$$c_2 f(s+2) + \left\{\frac{-c_0 h_1(s)}{f(s+1)} q_1 (s+1) + c_0 q_2 s\right\} + \left\{\frac{-c_0 h_1(s)}{f(s+1)} r_1 + c_0 r_2\right\} = 0$$

و بذلك نحصل على قيمة c_2

$$c_2 = \frac{c_0\{h_1(s) q_1 (s+1) - q_2 s\, f(s+1) + r_1 h_1(s) - r_2 f(s+1)\}}{f(s+1) f(s+2)}$$

$$\Longrightarrow c_2 = c_0 \frac{h_2(s)}{f(s+1) f(s+2)} \qquad (18)$$

حيث

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$h_2(s) = h_1(s)q_1(s+1) - q_2 s\, f(s+1) + r_1 h_1(s) - r_2 f(s+1)$$

متعددة حدود في s. و هكذا نحصل على

$$c_i = c_0 \frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\dots f(s+i)} \qquad (19)$$

حيث $h_i(s)$ متعددة حدود في s.

إذا عوضنا عن $\boldsymbol{s = s_1}$ في المعادلة (19) سوف نحصل على قيمة c_i بدلالة c_0 (حيث c_0 ثابت اختياري لا يساوى الصفر).

و بالمثل نعوض عن $s = s_2$ في المعادلة (19) لكى نحصل على الحل الثاني للمعادلة المميزة و هذا يتحقق عندما

$$f(s_1 + i) \neq 0$$
$$f(s_2 + i) \neq 0 \qquad (20)$$

لأجل i عدد صحيح موجب .

من المعادلة (16) يمكن أن نكتب

$$f(s+i) = (s+i-s_1)(s+i-s_2)$$

و بالتالي لأجل $s = s_1$ يكون

$$f(s_1 + i) = i(s_1 - s_2 + i)$$

و كذلك لأجل $s = s_2$ يكون

$$f(s_2 + i) = i(s_2 - s_1 + i) \qquad (21)$$

المعادلة (21) تكون متحققة إذا و فقط إذا كان $\boldsymbol{s_2 - s_1}$ ليس عدد صحيح موجب هذا يعنى أن الفرق بين جذور المعادلة المميزة ليس عدد صحيح (تذكر أننا فرضنا $s_2 \geq s_1$)

إذا كان الفرق بين جذور المعادلة المميزة عدد صحيح أي $s_2 - s_1 = r$ فإن الخطوات أعلاه تكون متحققة. في هذه الحالة نحصل من المعادلات (21) على

$$f(s_1 + i) = i(-r + i) \qquad (21)$$

$$f(s_2 + i) = i(r + i) \qquad (21)$$

نلاحظ عندما $i =$ نحصل على

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$f(s_1 + i) = 0$$

و لكن $f(s_2 + i) \neq 0$ لأجل أي عدد صحيح موجب i و بذلك الخطوات أعلاه تكون متحققة لأجل $s = s_2$ و لكن غير متحققة لأجل $s = s_1$.

لندرس الأن كيفية إيجاد الحل الثاني :

إذا استعملنا العلاقة (19) قبل اختيار قيمة s نحصل على المتسلسلات :

$$\mathrm{y}(x,\mathrm{s}) = c_0 x^s \left\{1 + \frac{h_1(s)}{f(s+1)}x + \frac{h_2(s)}{f(s+1)f(s+2)}x^2 + \cdots + \frac{h_i(s)}{f(s+1)f(s+2)\ldots f(s+i)}x^i + \cdots\right\} \quad (24)$$

نعلم باستعمال طريقة تكوين المعاملات ... ... $c_1, c_2,$ إن كل حدود الطرف الأيمن تكون معرفة جيدا لذلك $\mathrm{y}(x,s)$ يجب أن تحقق :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\,q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = c_0\,f(s)x^s$$

وحيث أن المعادلات (13) متحققة فإن معاملات كل قوى $x^{s+i}, i \geq 1$ يجب أن تكون معدومة. نستعمل الان المعادلات (9) و (12) نجد أن معاملات x^s هى $c_0 f(\mathrm{s})$.

هذه المعادلة يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\,q(x)\frac{d}{dx} + r(x)\right\}\mathrm{y}(x,s) = c_0\,f(s)x^s \quad (25)$$

جميع حدود الطرف الأيمن للمعادلة (24) ليست معرفة جيدا في حالة $s = s_1$ حيث توجد أصفار في المقامات لأجل $i \geq r$. علاوة على ذلك إذا ضربنا $\mathrm{y}(x,s)$ في $f(s+r)$ سوف تنعدم المعاملات في مقامات الحدود الأخيرة التي تكون معدومة عندما $s = s_1$. و حيث أن

$$f(\mathrm{s}+r) = (\mathrm{s}+r-s_1)(s+r-s_2) = (s+s_2-2s_1)(s-s_1)$$

سوف تتضاعف من خلال $(\mathrm{s}-s_1)$. كذلك حيث أن المعامل يكون مستقل عن فإن المعادلة (25) تكتب بالشكل :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\,q(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}(s-s_1)y(x,s) = c_0\,(s-s_1)f(s)x^s = c_0\,(s-s_1)^2(s-s_2)x^s \tag{26}$$

حيث إننا استعملنا المعادلة (16).

نضع $s=s_2$ نحصل على :

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\,q(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}(s_2-s_1)y(x,s_2)=0$$

التي تثبت أن $y(x,s_2)$ تكون حل. بنفس الطريقة بوضع $s=s_1$ يعطي

$$(s-s_1)y(x,s)|_{s=s_1}$$

تكون حل.

في الحقيقة هذه المتسلسلات ليست مستقلة عن $y(x,s_2)$ و إنما هى مضروب لها و ذلك كالآتي : المعامل $s-s_1$ يخفي أصفار المقامات لأجل $i\geq r$ و لكن يثبت وجود أصفار في البسط لأجل $i<r$ وبذلك القوى الأولى في المتسلسلات هي $x^{s_1+r}=x^{s_2}$ التي هي نفسها الحدود الأولى في $y(x,s_2)$. وحيث إننا نستعمل نفس القواعد لحساب أي معاملات في الحدود السابقة فيجب أن نحصل على نفس المتسلسلات في الحالتين.

الأن إذا فاضلنا طرفي المعادلة (26) بالنسبة إلى s نحصل على :

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\,q(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}\left[\frac{d}{ds}\{(s-s_1)y(x,s)\}\right] = c_0\left[(s-s_1)^2\frac{d}{ds}\{(s-s_2)x^s\}+2(s-s_1)(s-s_2)x^s\right] \tag{27}$$

لاحظ أن الطرف الأيمن من المعادلة (27) يساوى صفر عندما $s=s_1$ و بذلك يجب أن يكون $\left[\frac{d}{ds}\{(s-s_1)y(x,s)\}\right]_{s=s_1}$ حل للمعادلة التفاضلية وبذلك يجب أن نأخذ

$$[(s-s_1)y(x,s)]_{s=s_1} \tag{28}$$

و

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s-s_1)y(x,s)\}\right]_{s=s_1} \tag{29}$$

كحلول مستقلة.

بطريقة أخرى في هذه الحالة أي عندما يكون الفرق بين جذور المعادلة المميزة عددا صحيحا : لدينا $f(s+i)=0$ عندما $s=s_1, i=r$ و يمكن كتابة ذلك بالشكل $h_r(s_1)=0$ في هذه الحالة c_r تكون غير معينة باعتبار لها صفر في البسط و المقام و بذلك يمكن أن نستعمل ذلك كثابت اختياري أخر للحصول على الحلين المستقلين.

حالة 1 : عندما جذور المعادلة المميزة متساوية و لتكن $s=s_1$ في هذه الحالة تكون :

$$f(s)=(s-s_1)^2$$

و باستعمال المعادلة (25) نحصل على :

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\,q(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}y(x,s)=c_0(s-s_1)^2x^s \tag{30}$$

بوضع $s=s_1$ يكون الطرف الأيمن من المعادلة (30) يساوى صفر و بذلك $y(x,s_1)$ تكون حل. و لكن إذا فاضلنا طرفي المعادلة (30) بالنسبة إلى s نحصل على :

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\,q(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right\}\left[\frac{d}{ds}\{y(x,s)\}\right] = c_0\left[2(s-s_1)x^s+(s-s_1)^2\frac{d}{ds}\{x^s\}\right] \tag{31}$$

كذلك الطرف الأيمن من العلاقة (31) يساوى صفرعندما $s=s_1$ في هذه الحالة
$\left[\frac{d}{ds}\{y(x,s)\}\right]_{s=s_1}$ قد يكون مستقل عن $y(x,s_1)$ و بذلك يكون لدينا حلين مستقلين هما:

$$y(x,s_1) \quad \text{و} \quad \left[\frac{d}{ds}\{y(x,s)\}\right]_{s=s_1} \tag{32}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

نلخص الأن طرق الحصول على حلين مستقلين كما سبق. لذلك نصنف أربع حالات مختلفة :

(1) إذا كانت جذور المعادلة المميزة مختلفة و الفرق بينهما ليس عدد صحيح فإن الحلول المستقلة هي:

$y(x, s_1)$ و $y(x, s_2)$

(2) إذا كان الفرق بين الجذور s_1 و s_2 $(s_2 > s_1)$ هوعدد صحيح و أحد معاملات المتسلسلات $y(x, s)$ غير منتهي عندما $s = s_1$ فإن الحلول المستقلة تعطى على صورة :

$$[(s - s_1)y(x, s)]_{s=s_1}$$

و

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s - s_1)y(x, s)\}\right]_{s=s_1}$$

(3) إذا كان الفرق بين الجذور s_1 و s_2 $(s_2 > s_1)$ هوعدد صحيح و أحد معاملات المتسلسلات $y(x, s)$ ليكن c_r غير معين عندما $s = s_1$ فإن الحلول المستقلة تكون باختيار c_0, c_r كثوابت اختيارية.

(4) إذا كانت جذور المعادلة المميزة متساوية و لتكن $s = s_1$ فإن الحلول المستقلة تعطى على صورة :

$$y(x, s_1)$$

و

$$\left[\frac{d}{ds}y(x, s)\right]_{s=s_1}$$

يجب أن تكون هذه المتسلسلات متقاربة لجميع قيم x التى من خلالها يكون الحل متقارب هو على الأقل مدى قيم x في حالة كل من $r(x)$ و $\mathrm{q}(x)$ يمكن أن يعبر عنها كمتسلسلات قوى متقاربة.

أما في حالة كل من $r(x)$ و $q(x)$ لا يمكن أن يعبر عنها كمتسلسلات قوى في x لأجل أي مدى x مثل $\frac{1}{x}$ أو $e^{1/x}$ في هذه الحالة نضع التغييرات الأتية :

$$\grave{x} = x - a \quad \text{أو} \quad \grave{x} = \frac{1}{x}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و بذلك يمكن أن يعبر عن $r(x)$ و $q(x)$ كمتسلسلات قوى في $\acute{x}$ و نوجد الحل بدلالة $\acute{x}$ بدلا من x.

1.2. أمثلة (Examples)

مثال 1 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (33)$$

الحل : أولا نضع المعادلة في صورة المعادلة :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\,q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$$

بحيث $r(x)$ و $q(x)$ يعبر عنها كمتسلسلات قوى. بضرب المعادلة (33) في $\frac{1}{2}$ نحصل على:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x.\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{2}y=0 \qquad (34)$$

$r(x)=\frac{x}{2}$ و $q(x)=\frac{1}{2}$ متسلسلات قوى متقاربة لأجل كل قوى x إذاً نضع الحل في صورة:

نلاحظ

$$y(x,s)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^{s+n}$$

$$\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)x^{s+n-1}$$

و كذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}$$

بالتعويض عن العلاقتين $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ في العلاقة (33) ينتج أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=\sum_{n=0}^{+\infty}2c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)x^{s+n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^{s+n}$$

إذاً :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}2c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)x^{s+n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}c_{n-1}x^{s+n-1}=0$$

عندما $n=0$ نحصل على :

$$2c_0s(s-1)+c_0s=0\Longrightarrow c_0s(2s-1)=0 \qquad (35)$$

و عندما $n\geq 1$ نجد إن :

$$2c_n(s+n)(s+n-1)+c_n(s+n)+c_{n-1}=0$$

$$\Longrightarrow c_n(s+n)\{2(s+n)-1\}+c_{n-1}=0 \qquad (36)$$

من المعادلة (36) حيث أن $c_0\neq 0$ نحصل على المعادلة المميزة الأتية :

$$s(2s-1)=0\Longrightarrow s=0 \quad \text{و} \quad s=\frac{1}{2}$$

نلاحظ أن هذه الجذور مختلفة والفرق بينها ليس عددا صحيحا . إذاً من المعادلة (36) تنتج العلاقة التكرارية الأتية:

$$c_n=-\frac{c_{n-1}}{(s+n)\{2(s+n)-1\}}$$

وبذلك نجد أن

$$c_1=-\frac{c_0}{(s+1)\{2(s+1)-1\}}=-\frac{c_0}{(s+1)(2s+1)},$$

$$c_2=-\frac{c_1}{(s+2)\{2(s+2)-1\}}=\frac{c_0}{(s+1)(s+2)(2s+1)(2s+3)},$$

$$c_3=-\frac{c_2}{(s+3)\{2(s+3)-1\}}=-\frac{c_0}{(s+1)(s+2)(s+3)(2s+1)(2s+3)(2s+5)},$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و هكذا

$$c_n = (-1)^n \frac{c_0}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)(2s+1)(2s+3)\dots(2s+2n-1)},$$

بذلك نحصل على :

$$\begin{aligned} &y(x,s) \\ &= c_0 x^s \left\{ 1 - \frac{x}{(s+1)(2s+1)} + \frac{x^2}{(s+1)(s+2)(2s+1)(2s+3)} \right. \\ &+ \cdots \\ &+ (-1)^n \frac{x^n}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)(2s+1)(2s+3)\dots(2s+2n-1)} \\ &\left. + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{33}$$

حيث إن جذور المعادلة المميزة هي $s = 0$ و $s = \frac{1}{2}$ فإن الحلول المستقلة تعطى على صورة $y(x,0)$ و $y(x,\frac{1}{2})$ حيث

$$\begin{aligned} y(x,0) = c_0 \left\{ 1 - \frac{x}{1.1} + \frac{x^2}{1.2.1.3} - \frac{x^3}{1.2.3.1.3.5} + \cdots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{x^n}{1.2.3\dots.n.1.3.5\dots(2n-1)} + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{38}$$

و

$$\begin{aligned} y\left(x,\frac{1}{2}\right) = c_0 x^{1/2} \left\{ 1 - \frac{x}{\frac{3}{2}.2} + \frac{x^2}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.2.4} + \cdots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{x^n}{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\dots\frac{2n+1}{2}.2.4.6\dots 2n} + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{39}$$

و بما إن :

$$1.2.3\dots.n = n!,$$

$$\begin{aligned} 1.3.5\dots(2n-1) &= \frac{1.2.3.4\dots(2n-1)2n}{2.4\dots\dots\dots(2n-2).2n} \\ &= \frac{(2n)!}{2.1.2.2.2.3\dots 2(n-1).2n} \end{aligned}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad (40)$$

و كذلك :

$$\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}\dots\dots\frac{2n+1}{2} = \frac{1}{2^n}.3.5.7\dots\dots(2n+1)$$
$$= (\frac{1}{2^n}).\frac{2.3.4.5.6.7\dots(2n+1)}{2.4.6\dots 2n} = (\frac{1}{2^n})\frac{(2n+1)!}{2^n.n!}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}.n!} \qquad (41)$$

و أيضاً :

$$2.4.6\dots\dots 2n = 2^n.n! \qquad (42)$$

بذلك نحصل على :

$$y(x,0) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!\left\{\frac{(2n)!}{2^n n!}\right\}} = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!}$$

و

$$y\left(x,\frac{1}{2}\right) = c_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!\left\{\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!}\right\}2^n.n!}$$
$$= c_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n+1)!}$$

و بذلك نحصل على الحل العام الذي يكتب في صورة تركيبية خطية من $y(x,0)$ و $y\left(x,\frac{1}{2}\right)$ كالآتي :

$$y = \mathrm{A}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n)!} + Bx^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{(2n+1)!}.$$

حيث A و B ثوابت اختيارية.

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

مثال 2 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=0 \qquad (43)$$

الحل : أولاً نضع المعادلة في صورة المعادلة :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\,q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0$$

بحيث $r(x)$ و $q(x)$ يعبر عنها كمتسلسلات قوى. نضرب المعادلة (43) في $\frac{x}{1-x}$ نحصل على :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\,\frac{dy}{dx}-\frac{x}{1-x}y=0$$

إذاً $q(x)=1$ و $r(x)=\frac{x}{1-x}$ واضح أن $q(x)$ متسلسلة قوى متقاربة لأجل كل قوى x .

و لكن $r(x)$ ليست متسلسلة قوى و لكن يمكن التعبير عنها في صورة متسلسلة قوى باستخدام بعض النظريات مثل النظرية الثنائية (binomial theorem) بحيث تكون $r(x)$ متقاربة لأجل كل قيم x التي تحقق $|x|<1$ و بذلك الحل التسلسلي الذي نحصل عليه يكون متقارب على الأقل لأجل $|x|<1$.

إذاً نضع الحل في صورة :

$$y(x,s)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^{s+n}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)x^{s+n-1}$$

و كذلك :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-2}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بالتعويض عن العلاقتين $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ في العلاقة (43) ينتج أن :

$$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s+n)x^{s+n-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s+n)x^{s+n}-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{s+n}$$

إذاً

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(s+n-1)(s+n-2)x^{s+n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(s+n)x^{s+n-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}(s+n-1)x^{s+n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{s+n-1}=0$$

عندما $n=0$ نحصل على :

$$c_0 s(s-1)+c_0 s=0 \Longrightarrow c_0 s^2=0 \Longrightarrow s^2=0 \qquad (44)$$

و عندما $n \geq 1$ فإن :

$$c_n(s+n)(s+n-1)-c_{n-1}(s+n-1)(s+n-2)+c_n(s+n)$$
$$-c_{n-1}(s+n-1)-c_{n-1}=0$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Longrightarrow c_n(s+n)^2 - c_{n-1}\{(s+n-1)^2+1\} = 0$$

$$\Longrightarrow c_n = c_{n-1}\frac{\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+n)^2} \qquad (45)$$

المعادلة (44) تعطي جذران متساويان $s = 0$ و حسب الملاحظات السابقة يكون الحلين المستقلين هما $y(x,0)$ و $\left[\frac{d}{ds}y(x,s)\right]_{s=0}$.

الآن من المعادلة (45) نحصل على :

$$c_1 = c_0\frac{(s^2+1)}{(s+1)^2},$$

$$c_2 = c_1\frac{\{(s+1)^2+1\}}{(s+2)^2} = c_0\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2},$$

و هكذا :

$$c_n = c_0\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\ldots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\ldots(s+n)^2},$$

بذلك نحصل على :

$$y(x,s) =$$

$$= c_0x^s\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\ldots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\ldots(s+n)^2}.x^n\right\}$$

$$\Longrightarrow y(x,0) = c_0\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\{1^2+1\}\{2^2+1\}\{3^2+1\}\ldots\{(n-1)^2+1\}}{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}.x^n\right\}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= c_0\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.2.5.10.17 \dots \dots \{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}.x^n\right\}$$
$$= c_0 y_1(x) \qquad (46)$$

و كذلك :

$$\frac{d}{ds}y(x,s) =$$
$$= c_0\left(\frac{d}{ds}x^s\right)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}x^n\right\}$$
$$+ c_0 x^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} f_n(s) \qquad (47)$$

حيث :

$$f_n(s) = \frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\dots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\dots(s+n)^2}x^n$$

بالنسبة للحد الأول لدينا :

$$\frac{d}{ds}x^s = \frac{d}{ds}(e^{\ln x})^s = \frac{d}{ds}e^{s\ln x} = (\ln x)e^{s\ln x} = (\ln x)x^s$$

$$\Longrightarrow \left[\frac{d}{ds}x^s\right]_{s=0} = \ln x\,.$$

و كذلك الحد الثاني :

$$\frac{d}{ds}\ln f_n(s) = \frac{1}{f_n(s)}\frac{d}{ds}f_n(s)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{ds}f_n(s) = f_n(s)\frac{d}{ds}\ln f_n(s)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و لكن

$$\ln f_n(s) = \ln\{s^2+1\} + \ln\{(s+1)^2+1\} + \cdots + \ln\{(s+n-1)^2+1\} - \ln(s+1)^2 - \ln(s+2)^2 - \cdots \ln(s+n)^2$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \ln\{(s+m-1)^2+1\} - \sum_{m=1}^{n} \ln\,(s+m)^2$$

$$\frac{d}{ds}\ln f_n(s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{2(s+m-1)}{(s+m-1)^2+1} - \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{s+m}$$

$$= 2\sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m}\right\}$$

بذلك نحصل على :

$$\frac{d}{ds} f_n(s) = \frac{2\{s^2+1\}\ldots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2\ldots(s+n)^2} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1} - \frac{1}{s+m}\right\}$$

و أيضا :

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{ds} f_n(s)\right]_{s=0}$$

$$= \frac{2\{1\}\{1^2+1\}\{2^2+1\}\ldots\{(n-1)^2+1\}}{1^2.2^2\ldots\ldots n^2} \sum_{m=1}^{n} \left\{\frac{m-1}{(m-1)^2+1} - \frac{1}{m}\right\}$$

حيث إننا استعملنا :

$$x = e^{\ln x} \quad , \quad \ln x = log_e x$$

بوضع $s = 0$ في المعادلة (47) نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\left[\frac{d}{ds}y(x,s)\right]_{s=0}$$
$$= c_0 \ln x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{1\}\{1^2+1\}\{2^2+1\}\dots\{(n-1)^2+1\}x^n}{1^2.2^2\dots\dots n^2}\right]$$
$$+ c_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

$$= c_0 y_1(x) \ln x + c_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 y_2(x)$$

حيث أن :

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

و بذلك نحصل على الحل العام للمعادلة (43) كالآتي :

$$y = \mathrm{A} y_1(x) + B y_2(x).$$

حيث A و B ثوابت اختيارية.

مثال 3 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^2 \frac{d^2y}{x^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (3-x)y = 0$$

الحل : نلاحظ أن $q(x) = -3$ و $r(x) = 3 - x$ كلاهما متسلسلاتا قوى متقاربة لأجل كل قوى x . لذلك نضع الحل على صورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{s+n}$$

بتطبيق نفس الخطوات في الأمثلة السابقة: عندما $n = 0$ نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$c_0(s-1)(s-3)=0 \Longrightarrow (s-1)(s-3)=0 \qquad (48)$$

و عندما $n \geq 1$ فإن :

$$c_n(s+n-1)(s+n-3)-c_{n-1}=0 \qquad (49)$$

من المعادلة (48) نحصل على $s=1$ و $s=3$. لاحظ أن الفرق بين هذه الجذور هو عدد صحيح و من المعادلة (49) نحصل على العلاقة التكرارية الأتية :

$$c_n=\frac{c_{n-1}}{(s+n-1)(s+n-3)}, \qquad n \geq 1 \qquad (50)$$

$$\Longrightarrow c_1=\frac{c_0}{s(s-2)}, \qquad c_2=\frac{c_1}{(s-1)(s+1)}=\frac{c_0}{s(s+1)(s-2)(s-1)}$$

و هكذا

$$c_n = \frac{c_0}{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)(s-2)(s-1)s\dots(s+n-3)} \qquad (51)$$

نلاحظ من المعادلة (50) إنه عندما $s=1$ كل $n \geq 2$, c_n غير منتهية و بذلك الحل العام يكون في صورة :

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s-1)y(x,s)\}\right]_{s=1} \quad \text{و} \quad [(s-1)y(x,s)]_{s=1}$$

إذاً :

$$y(x,s) = c_0x^s\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)(s-1)s\dots(s+n-3)}\right\}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Longrightarrow (s-1)y(x,s)$$
$$= c_0 x^s \left\{ (s-1) + \frac{s-1}{s(s-2)} x \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)} \right\}$$

إذاً الحل الأول هو :

$$[(s-1)y(x,s)]_{s=1} = c_0 x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{1.2\dots n(-1).1.2\dots(n-2)}$$

$$= c_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!\,(n-2)!} := c_0 y_1(x).$$

و الحل الثاني هو :

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s-1)y(x,s)\}\right]_{s=1}$$

نحسب أولاً $\left[\frac{d}{ds}\{(s-1)y(x,s)\}\right]$ كالآتي :

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s-1)y(x,s)\}\right]$$
$$= c_0 \left(\frac{d}{ds} x^s\right) \left\{ (s-1) + \frac{s-1}{s(s-2)} x \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)} \right\}$$
$$+ c_0 x^s \left\{ 1 + \frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s(s-2)} x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \frac{d}{ds} f_n(s) \right\}$$

حيث :

$$f_n(s) = \frac{1}{s(s+1)\dots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\dots(s+n-3)}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بذلك يكون لدينا :

$$\frac{d}{ds}f_n(s) = f_n(s)\frac{d}{ds}\ln f_n(s)$$

$$\Longrightarrow \ln f_n(s) = -\ln s - \ln(s+1) - \ln(s+2) - \cdots - \ln(s+n-1) - \ln(s-2) - \ln s - \ln(s+1) - \cdots - \ln(s+n-3)$$

إذاً ينتج أن :

$$\frac{d}{ds}\ln f_n(s) = -\left\{\frac{2}{s} + \frac{2}{s+1} + \cdots + \frac{2}{s+n-3} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+n-2} + \frac{1}{s+n-1}\right\}$$

عندما $s = 1$ ينتج أن :

$$\left[\frac{d}{ds}\ln f_n(s)\right]_{s=1} = -\left\{2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right) - 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\}$$

$$= \left\{2\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\}$$

أيضاً :

$$[f_n(s)]_{s=1} = \frac{1}{1.2\ldots n(-1).\,1.2\ldots(n-2)} = -\frac{1}{n!\,(n-2)!}$$

$$\left[\frac{d}{ds}f_n(s)\right]_{s=1} = \frac{1}{n!\,(n-2)!}\left\{2\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m} - 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\}$$

من السهل التحقق من أن:

$$\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s(s-2)}\right)\right]_{s=1} = -1$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

(تترك كتمرين للقارئ.)

كما سبق لدينا:

$$\frac{d}{ds}x^s = (\ln x)\,x^s$$

إذاً نحصل على :

$$\left[\frac{d}{ds}\{(s-1)y(x,s)\}\right]_{s=1} = c_0\,(\ln x)y_1(x) + c_0 x\left\{1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right\}$$

$$= c_0 y_2(x)$$

بذلك يكون الحل العام هو :

$$y = \mathrm{A}y_1(x) + By_2(x)$$

حيث A و B ثوابت اختيارية.

مثال 4 : أوجد العل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (x^3 - 2x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

الحل : نلاحظ أن :

$q(x) = -2 + x^2$ و $r(x) = -2$ كلاهما متسلسلاتا قوى متقاربة لأجل كل قوى x .
لذلك نضع الحل على صورة :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{s+n}$$

بتطبيق نفس الخطوات في الأمثلة السابقة نصل عندما $n = 0$ إلى:

$$c_0(s-2)(s-1) = 0 \Longrightarrow (s-2)(s-1) = 0 \qquad (52)$$

$$c_1(s-1)s = 0 \qquad (53)$$

عندما $n \geq 2$ فإن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$c_n(s+n-2)(s+n-1)+c_{n-2}(s+n-2)=0 \qquad (54)$$

من المعادلة (52) نحصل على $s=1$ و $s=2$. لاحظ أن الفرق بين هذه الجذور هو عدد صحيح و عندما $s=1$ المعادلة (53) متحققة و بذلك c_1 غير معينة إذاً الحلين المستقلين نحصل عليهما من قيمة واحدة لـ s و هى $s=1$. و من المعادلة (54) نحصل على العلاقة التكرارية الأتية :

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{(s+n-1)}, \qquad n\geq 2$$

الحد $s+n-2$ يحذف حيث إنه ليس صفرا لأجل $n\geq 1$ و $s=1$ أو $s=2$ فعندما $s=1$ نحصل على :

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{n},\ n\geq 2 \Rightarrow c_2=-\frac{c_0}{2}, \quad c_3=-\frac{c_1}{3}, \qquad c_4=-\frac{c_2}{4}=\frac{c_0}{2.4}$$

$$c_5=-\frac{c_3}{5}=\frac{c_1}{3.5}$$

وهكذا:

$$c_{2n}=(-1)^n\frac{c_0}{2.4.6\ldots 2n} \quad \text{و} \quad c_{2n+1}=(-1)^n\frac{c_1}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

إذاً

$$y(x,1)=x\left[c_0\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n}\right\}+c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{1.3.5\ldots(2n+1)}\right]$$

بذلك يكون الحل العام هو :

$$y=Ay_1(x)+By_2(x)$$

حيث A و B ثوابت اختيارية ويكون

$$y_1(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n}$$

وأيضا :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1.3.5 \dots (2n+1)}.$$

ندرس الأن حالة خاصة من المعادلة (1) أي عندما $p(x) = 1,\ q(x) = -x,$ $r(x) = -1$ لنأخذ المعادلة التفاضلية :

$$y'' - xy' - y = 0 \qquad (55)$$

فلإيجاد حلين مستقلين خطيا للمعادلة (54) نضع الحل على صورة :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad (56)$$

بالتعويض عن المعادلة (56) في المعادلة (55) ينتج أن:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} (n+2)(n+1)\, c_{n+2} x^n - \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} n\, c_n x^n - \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} c_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)c_n]\, x^n = 0$$

بذلك يكون :

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)c_n = 0$$

$$\Longrightarrow c_{n+2} = \frac{c_n}{n+2}$$

فللحصول على حلين للمعادلة (55) نختار مجموعتين مختلفتين لقيم c_0, c_1 كالآتي :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0 \dots \dots \dots \dots \quad (i)$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1 \dots \dots \dots \quad (ii)$$

نلاحظ في الحالة (i) أن كل المعاملات الفردية أصفارا والمعاملات الزوجية تتعين بالعلاقة :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$c_{2n} = \frac{1}{n\,!}, \quad n \geq 0,$$

بذلك نحصل من العلاقة (56) على:

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2\,!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n\,!} = e^{x^2}.$$

وفي الحالة (ii) أن كل المعاملات الزوجية أصفارا والمعاملات الفردية تتعين بالعلاقة :

$$c_{2n+1} = \frac{2^n}{1.3.5 \ldots . (2n+1)}, \quad n \geq 0,$$

بذلك نحصل من العلاقة (56) على:

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \cdots \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n+1}}{1.3.5 \ldots . (2n+1)}.$$

ندرس الآن طريقة فروبينوس لإيجاد حل مسألة القيم الابتدائية التي تتكون من معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى مع شرط ابتدائي . لنأخذ المثال الآتي .

مثال 5 : أوجد حل مسألة القيم الابتدائية الآتية :

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

الحل : نضع الحل على صورة المعادلة (56) كما سبق أي أن :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

بتعويض $y(x)$ أعلاه في المعادلة التفاضلية ينتج أن :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - x = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, c_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - x = 0$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)c_{n+1} - c_n\right) x^n - x = 0$$

بذلك يكون :

$$\Rightarrow (c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1 - 1)x + (3c_3 - c_2)x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left((n+1)c_{n+1} - c_n\right) x^n = 0$$

حيث أن معاملات قوى x يجب أن تكون صفرا فإن :

$$c_1 = c_0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}, \qquad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3\,!} + \frac{1}{3\,!}$$

كذلك يكون :

$$(n+1)c_{n+1} - c_n = 0, \quad n \geq 3$$

فإن الصيغة التكرارية تكون على صورة:

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}, \quad n \geq 3$$

$$n = 3 \Rightarrow c_4 = \frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{4\,!} + \frac{1}{4\,!}$$

$$n = 4 \Rightarrow c_5 = \frac{c_4}{5} = \frac{c_0}{5\,!} + \frac{1}{5\,!}$$

إذاً الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

$$= c_0 + c_0 x + (\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2})x^2 + (\frac{c_0}{3\,!} + \frac{1}{3\,!})x^3 + (\frac{c_0}{4\,!} + \frac{1}{4\,!})x^4 + \cdots$$

$$= c_0 + c_0 x + \frac{1}{2\,!}(c_0 + 1)x^2 + \frac{1}{3\,!}(c_0 + 1)x^3 + \frac{1}{4\,!}(c_0 + 1)x^4 + \cdots$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \left[(c_0+1)+(c_0+1)x+\frac{1}{2\,!}(c_0+1)x^2+\frac{1}{3\,!}(c_0+1)x^3 + \frac{1}{4\,!}(c_0+1)x^4+\cdots\right]-1-x$$

$$= (c_0+1)\left[1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots\right]-1-x$$

باستعمال الشرط الابتدائي $y(0)=2$ نجد أن $c_0=2$ إذاً :

$$y(x)=3e^x-x-1.$$

1.3. تمارين (Exercises)

1- أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة فروبينوس :

(1) $4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-y=0$

(2) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(3) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x^2\dfrac{dy}{dx}-y=0$

(5) $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+y=0$

(6) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x^2-3x)\dfrac{dy}{dx}+(4-2x)y=0$

(7) $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

2- أوجد حل مسائل القيم الابتدائية الآتية :

(8) $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$ (9) $\begin{cases} y'=y-1 \\ y(0)=-1 \end{cases}$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الثاني (Chapter Two)

متسلسلات فوريه

Fourier series

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

مقدمة عامة عن متسلسلات فورييه

سميت متسلسلات فورييه باسم العالم الفرنسي جوزيف فورييه (Fourier J. B.). هذه المتسلسلات لها دور أساسي في الرياضيات و في العديد من التطبيقات في مجال الرياضيات و أيضاً لها العديد من التطبيقات العلمية في دراسة الانتقال الحراري. سوف ندرس في هذا الفصل الدوال الدورية و مفكوكها التي تقودنا إلى دراسة متسلسلات فورييه بشكل عام و كذلك متسلسلات الجيب و متسلسلات جيب التمام لفورييه. سوف نتطرق أيضاً إلى دراسة الصيغة التكاملية للمجموع الجزئي والصيغة العقدية لمتسلسلات فورييه.

1.2 متسلسلات فورييه (Fourier Series)

في هذا البند سوف ندرس بعض التعريفات الأساسية التي تقودنا إلى تعريف متسلسلات فورييه ثم نعطى بعض الأمثلة التطبيقية لهذه المتسلسلات.

تعريف 1.2 : نقول عن الدالة $f(x)$ أنها دالة دورية (periodic function) إذا كان :

$$\forall x, \quad f(x+T) = f(x), \qquad T \text{ موجب ثابت}$$

المقدار T الذى يحقق العلاقة أعلاه يسمى دور الدالة $f(x)$.

تعريف 2.2: يقال عن الدالة الحقيقية $f(x)$ أنها مستمرة قطعة قطعة في الفترة المغلقة $[,b]$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة في هذه الفترة ما عدا عدد منته من النقاط حيث تعاني الدالة عندها قفزة قفزة.

تعريف 3.2: يقال عن الدالة الحقيقية f أنها ملساء $(smooth)$ قطعة قطعة في الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا و فقط إذا كانت الدالة f و مشتقاتها مستمرة في هذه الفترة أو لأي منهما قفزة محدودة عند عدد منته من النقاط.

تعريف 4.2: يقال عن الدالة f أنها ملساء $(smooth)$ قطعة قطعة في $\mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كانت هذه الدالة ملساء قطعة قطعة في كل فترة ذات طول محدود.

تعريف 5.2 : يقال عن الدالة الحقيقية f أنها قابلة للتكامل مطلقاً على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا و فقط إذا كان التكامل $\int_a^b |f(x)|dx$ موجود.

تعريف 6.2 : فضاء التكامل التربيعي $\ell_2(a,b)$ هو فضاء الدوال القابلة للتكامل تربيعياً على الفترة (a,b) أى أن :

$$f \in \ell_2(a,b) \Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx < \infty$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و يكون لأى دالتين f, g

$$(f.g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

تعريف 7.2 : سوف نستعمل الرموز الآتية للدلالة على النهاية من اليمين و من اليسار على الترتيب.

$$\lim_{y \to x^+} f(y) := f(x+0)$$

و كذلك

$$\lim_{y \to x^-} f(y) := f(x-0)$$

تعريف 8.2: لأى دالة دورية $f \in \ell_2(-\pi, \pi)$ تعرف متسلسلة فوريه المثلثية المرافقة للدالة f على إنها المتسلسلة :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

حيث :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \geq 1.$$

ملاحظات هامة عند حل التكامل لحساب المعاملات a_n, b_n :

(1) الدوال الزوجية (Even functions) هي التي تتماثل حول المحور الرأسي وتكون:

$$b_n = 0 \, , n \geq 1.$$

(2) الدوال الفردية (Odd functions) هي التي تتماثل حول نقطة الأصل وتكون:

$$a_n = 0, n \geq 0.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

(3) الدوال العامة (ليست فردية و ليست زوجية) يجب حساب كافة المعاملات
$a_0,\ a_n,\ b_n$.

مثال 1 : أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi$
الحل :
حيث أن الدالة فردية فإن $a_n = 0, n \geq 0$ بذلك يكون لأجل $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin ntdt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin ntdt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}cos\ nt\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nt\ \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ عدد فردي} \\ \frac{-2}{n}, & n \text{ عدد زوجي} \end{cases}$$

إذاً متسلسلة فوريه للدالة $f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi$ هي :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$= 2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x - 2\sum_{m=\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{1}{2m}\sin(2mx)$$

$$= 2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x - \sum_{m=\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{1}{m}\sin(2mx).$$

مثال 2 : أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x) = x^2,\ -\pi \leq x < \pi$

الحل : حيث أن الدالة زوجية فإن $b_n = 0, n \geq 1$ بذلك يكون لأجل $n \geq 0$:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos ntdt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 \cos ntdt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{n} sin\, nt\right]\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{\pi} t \sin nt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{n} sin\, nt\right]\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\left[-\frac{t}{n} cos\, nt\right]\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}.\frac{1}{n^2}\sin nt\ \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

إذاً متسلسلة فورييه هي :

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

2.2- متسلسلات الجيب لفورييه (Sinus series of Fourier) :

إذا كانت $f(x)$ دالة فردية و دورية دورها 2π فإنه يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه بالشكل الآتي :

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt\,.$$

3.2. متسلسلات جيب التمام لفورييه (Cosines series of Fourier):

إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية و دورية دورها 2π فإنه يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه بالشكل الآتي :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt.$$

نظرية 1.2 : المتطابقات الآتية صحيحة :

$$(a)\qquad \frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$(b)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{2}.$$

البرهان :

(a) نوجد أولاً قيمة المقدار $2\sin\frac{u}{2}\left[\frac{1}{2} + + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu\right]$ كالآتي :

$$2\sin\frac{u}{2}\left[\frac{1}{2} + + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu\right] = \sin\frac{u}{2} + 2\sin\frac{u}{2}\cos u$$

$$+2\sin\frac{u}{2}\cos 2u + \cdots + 2\sin\frac{u}{2}\cos nu$$

نستعمل المتطابقة المثلثية :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos\ y$$

إذاً الحد الثاني من الطرف الأيمن يكتب على صورة :

$$2\sin\frac{u}{2}\cos u = \sin\left(u+\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\frac{u}{2}-u\right) = \sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2}$$

و بنفس الطريقة للحد الثالث، وبقية الحدود، وبذلك يكون :

$$2\sin\frac{u}{2}\left[\frac{1}{2} + + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu\right] = \sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$+\sin\frac{5u}{2}-\sin\frac{3u}{2}+\cdots+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u$$

بذلك نستنتج

$$\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

وهو المطلوب الأول .

لإثبات المطلوب الثاني (b) نكامل النتيجة (a) نحصل على :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{1}{2}++\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu\right]du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{du}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos u\,du$$

$$+\cdots+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nu\,du$$

بإجراء عملية التكامل حداً بحد نجد

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{1}{2}+\cos u+\cos 2u+\cdots+\cos nu\right]du=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{u}{2}+\sin u+\cdots+\frac{\sin nu}{n}\right]\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{2}.$$

بطريقة مماثلة يمكن إثبات الصيغة الأخرى. تترك كتمرين للقارئ.

4.2. الصيغة التكاملية للمجموع الجزئي لمتسلسلة فوريه :

بما أن :

$$S(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}[a_m\cos mx+b_m\sin mx]$$

بالتعويض عن قيم المعاملات b_n, a_n, a_0 ينتج أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$S(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left[\cos mx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos mt\,dt\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left[\sin mx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin mt\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\sum_{m=1}^{n}\underbrace{(\cos mx\cos mt+\sin mx\sin mt)}_{\cos(m(t-x))}\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos(m(t-x))\right]dt$$

باستعمال نظرية 1 الفقرة (a) نجد :

$$S(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin(\frac{t-x}{2})}dt$$

باستبدال t ب $t+x$ ينتج أن :

$$S(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

وهي الصيغة التكاملية للمجموع الجزئي لمتسلسلة فوريه للدالة f و يرمز لها بالرمز $S_n(f)$ أي أن :

$$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt.$$

نظرية 2.2 : إذا حققت الدالة f كلاً من الشرطين الآتيين :

1- f دالة دورية و دورها هو 2π

2- f دالة ملساء قطعة قطعة في الفترة المغلقة $[-\pi,\pi]$

عندئذ يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \begin{cases} f(x), & f \text{ مستمرة عند النقطة } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & f \text{ ليست مستمرة عند النقطة } x \end{cases}$$

البرهان : إذا كانت الدالة f مستمرة عند النقطة x فإن :

$$f(x-0) = f(x+0) = f(x) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(f) = f(x).$$

وهو المطلوب. أما إذا كانت الدالة f ليست مستمرة عند النقطة x فإننا نستعمل الصيغة التكاملية للمجموع الجزئي لمتسلسلة فوريه نجد :

$$S_n(f) - \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2}f(x-0)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt - \frac{1}{2}f(x+0)$$

و باستعمال نظرية 1.2 الفقرة (b) ينتج أن :

$$S_n(f) - \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt - \int_{-\pi}^{0} f(x-0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(t+x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt - \int_{0}^{\pi} f(x+0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt\right]$$

إذاً :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$S_n(f) - \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+t) - f(x-0)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t) - f(x+0)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{f(x+t) - f(x-0)}{t}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

بأخذ النهاية لطرفي العلاقة السابقة عندما $n \to \infty$ ينتج أن :

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(f) - \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\psi_1(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\psi_2(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

حيث أن :

$$\psi_1(t) = \left[\frac{f(x+t) - f(x-0)}{t}\right].\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})},$$

$$\psi_2(t) = \left[\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}\right].\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})},$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

باستخدام قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}=1$$

بما أن المقدار $\frac{(x+t)-f(x-0)}{t}$ يكون محدودا في الفترة $[-\pi,0]$ لأن الدالة f ملساء قطعة قطعة. فعندما $t\to 0$ فإن هذا المقدار يؤول إلى المشتقة اليسرى للدالة f فهو إذاً محدود في الفترة $[-\pi,0]$.

و بنفس الطريقة نصل إلى أن المقدار $\frac{(x+t)-f(x+0)}{t}$ يكون محدودا في الفترة $[0,\pi]$.

بناءَ على ما سبق يمكن القول بأنه لأجل $\psi_1\in l_2[-,0]$ و لأجل $\psi_2\in l_2[0,\pi]$ يكون :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\psi_1(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0$$

و كذلك :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\psi_2(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0$$

إذاً نصل إلى:

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(f)-\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]\right]=0$$

بذلك يكون :

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

5.2.مفكوك دالة دورية دورها $2l$:

في هذه الحالة نعرف دالة $F(y):=f\left(\frac{l}{\pi}y\right),-\pi<y\leq\pi$ بوضع $x=\frac{l}{\pi}y$ إذاً يكون :

$$S(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos ny+b_n\sin ny]:=F(y)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right]$$

بحيث :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt$$

بوضع $u = \frac{l}{\pi} t$ نحصل على :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u)du$$

وكذلك بالمثل:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \cos(\frac{n\pi}{l} u) \, du$$

وأيضاً بنفس الطريقة نحصل على :

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \sin(\frac{n\pi}{l} u) \, du.$$

6.2. أمثلة : (Examples)

مثال 1 : أوجد متسلسلة فوريه للدالة $f(x) = x, \quad -3 \leq x < 3$

الحل: نلاحظ أن الدالة فردية و $l = 3$ فيكون $a_n = 0, n \geq 0$ إذاً :

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin(\frac{n\pi}{l} t) \, dt = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} t \sin(\frac{n\pi}{3} t) \, dt$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 t\sin(\frac{n\pi}{3}t)\,dt = \frac{2}{3}\left[-\frac{3t}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi t}{3})\right]\Big|_0^3$$

$$= \frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

إذاً.. متسلسلة فوريه للدالة هي :

$$S(f)(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right).$$

مثال 2 : أوجد مفكوك فوريه الدورية للدالة $f(x) = x^2, -2 < x \leq 2$

الحل : هنا الدالة زوجية و $l = 2$ إذاً يكون :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{2}x)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2 dt = \frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2\cos(\frac{n\pi}{2}t)\,dt = \left[\frac{2t^2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\Big|_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 t\sin(\frac{n\pi}{2}t)dt\right]$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left[-\frac{2t}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}t) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}t)\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

إذاً.. متسلسلة فوريه للدالة هي :

$$S(f)(x) = \frac{4}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

مثال 3 : إذا كان :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x \leq -1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

فأوجد لهذه الدالة :

a) مفكوك متسلسلة الجيب.

b) مفكوك متسلسلة جيب التمام.

c) مفكوك متسلسلة فوريه لهذه الدالة باعتبارها دالة دورية دورها 2.

الحل :

a) متسلسلة الجيب:

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin(\frac{n\pi}{l}t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} f(t)\sin(\frac{n\pi}{2}t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(t)\sin(\frac{n\pi}{2}t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 1.\sin(\frac{n\pi}{2}t)\,dt = \frac{-1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{n\pi}\left[(-1)^{\frac{n}{2}} - (-1)^n, \quad n\ even\right] \\ \frac{-1}{n\pi}(-1)^n, \quad n\ odd \end{cases}$$

b) متسلسلة جيب التمام :

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 1\,dt = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(\frac{n\pi}{l}t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} 1\cos(\frac{n\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}t)\Big|_{-2}^{-1}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \begin{cases} \frac{-1}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n\ odd \\ 0, & n\ even \end{cases}$$

إذاً :

$$S(f)(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos((2m+1)x).$$

c) مفكوك متسلسلة فوريه لهذه الدالة باعتبارها دالة دورية دورها 2 هو :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

بالتعويض عن المعاملات a_0, a_n, b_n (يترك كتمرين للقارئ) في العلاقة أعلاه نحصل على المطلوب.

7.2.الصيغة العقدية لمتسلسلات فوريه (complex formula of Fourier series):

بما إن:

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i}, \qquad \cos u = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}$$

بالتعويض في متسلسلة فوريه نجد أن :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi}{l}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{\frac{in\pi}{l}t} + e^{-\frac{in\pi}{l}t}}{2}\right) + b_n(\frac{e^{\frac{in\pi}{l}t} - e^{-\frac{in\pi}{l}t}}{2i})\right]$$

حيث إن :

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$a_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[e^{\frac{in\pi}{l}t} + e^{-\frac{in\pi}{l}t}\right]dt$$

$$b_n = \frac{1}{2il}\int_{-l}^{l} f(t)\left[e^{\frac{in\pi}{l}t} - e^{-\frac{in\pi}{l}t}\right]dt$$

إذاً يكون :

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{\frac{in\pi}{l}t} + e^{-\frac{in\pi}{l}t}}{2}\right) - ib_n\left(\frac{e^{\frac{in\pi}{l}t} - e^{-\frac{in\pi}{l}t}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{\frac{in\pi}{l}t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{\frac{-in\pi}{l}t}$$

حيث :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt := \beta_0$$

$$\frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-\frac{in\pi}{l}t}dt := \beta_{-n}, \quad n = 1,2, \dots \dots$$

و كذلك :

$$\frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\frac{in\pi}{l}t}dt := \beta_n, \quad n = 1,2, \dots \dots$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

إذاً :

$$S(f)(x) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_{-n} e^{\frac{in\pi}{l}t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{\frac{-in\pi}{l}t}$$

بما إن $\beta_{-n} = -\beta_n$ فإنه يمكن كتابة العبارة السابقة كالآتي :

$$S(f)(x) = \beta_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta_n e^{\frac{-in\pi}{l}t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n e^{\frac{-in\pi}{l}t}$$

إذاً:

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{\frac{-in\pi}{l}t}, \quad \beta_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{\frac{in\pi}{l}t} dt.$$

مثال 1 : أوجد الصيغة العقدية للدالة المعرفة :

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

الحل : هنا لدينا $l = 1$ فإن :

$$\beta_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t) e^{\frac{in\pi}{l}t} dt$$

$$= \frac{1}{2l}\left[\int_{-1}^{0} t\, e^{\frac{in\pi}{l}t} dt + 0\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{in\pi} e^{in\pi t} + \frac{e^{in\pi t}}{n^2\pi^2}\right]\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{-i}{2n\pi} e^{-in\pi} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[1 - e^{-in\pi}\right], \quad n \neq 0$$

$$= \frac{-i}{2n\pi}\left[\cos n\pi - i \sin n\pi\right] + \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[1 - \cos n\pi + i \sin n\pi\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi^2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right] + \frac{(-1)^{n+1}}{2n\pi} i$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\beta_n = \begin{cases} \dfrac{-i}{2n\pi}, & n \text{ عدد زوجي} \\ \dfrac{1}{n^2\pi^2} + \dfrac{1}{2n\pi} i, & n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

و لكى تكون $n \neq 0$ يجب إيجاد قيمة β_0 كالآتي :

$$\beta_0 = \frac{1}{2.1} \int_{-1}^{0} t\, dt = \frac{-1}{4}$$

إذاً الصيغة العقدية للدالة هي :

$$S(f)(x) = \frac{-1}{4} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_{2m} e^{-2im\pi x} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_{2m+1} e^{-i(2m+1)\pi x}.$$

مثال 2 : أوجد الصيغة العقدية للدالة $f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 3$

الحل :

هنا لدينا $l = 3$ و الدالة معرفة عند الفترة $[0,3]$ إذاً يكون لدينا :

$$\beta_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt = \frac{1}{6} \int_{-3}^{3} t\, dt = \frac{2}{6} \int_{0}^{3} t\, dt = \frac{3}{2}$$

و كذلك :

$$\beta_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{\frac{in\pi}{l}t} dt = \frac{1}{6} \left[\int_{-3}^{0} f(t) e^{\frac{in\pi}{3}t} dt + \int_{0}^{3} f(t) e^{\frac{in\pi}{3}t} dt \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\int_{0}^{3} t\, e^{\frac{-in\pi}{3}t} dt + \int_{0}^{3} t\, e^{\frac{in\pi}{3}t} dt \right] = \frac{2}{6} \int_{0}^{3} t \left[\frac{e^{\frac{-in\pi}{3}t} + e^{\frac{in\pi}{3}t}}{2} \right] dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{3} t \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) dt = \frac{1}{3} \left[\frac{3t}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right) + \frac{9}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{3}\right) \right] \Big|_0^3$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{3}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ عدد زوجي} \\ \dfrac{-6}{n^2\pi^2}, & n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

و بذلك تكون متسلسلة فوريه للدالة المطلوبة هي :

$$S(f)(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}e^{-i(2m+1)\frac{\pi}{3}x}, \quad 0 \le x \le 3.$$

8.2. تمارين : (Exercises)

(1) أوجد مفكوك فوريه لكل من الدوال الآتية :

$(a)\quad f(x) = \cos ax,\ a \notin \mathbb{Z}, \qquad |x| \le \pi$

$(b)\quad f(x) = e^{ax}, a \ne 0, \quad |x| \le \pi$

$(c)\quad f(x) = \cosh x, \qquad |x| \le 2$

$(d)\quad f(x) = \sinh x, \qquad |x| < 2$

$(e)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

(2) أوجد مفكوك الجيب لفوريه لكل من الدوال الآتية :

$(f)\quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x \le l \end{cases}$

$(g)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi x}{l}, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ 0, & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$(h) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ -\sin(\frac{\pi x}{l}), & \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

(3) أوجد مفكوك جيب التمام لفورييه لكل من الدوال الآتية :

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ 0, & \frac{l}{2} < x \le l \end{cases}$$

$$(j) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le h \\ 0, & h < x \le \pi \end{cases}$$

$$(k)\ f(x) = \sin ax, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad a \notin \mathbb{Z}$$

$$(l) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2l}, & 0 \le x \le 2l \\ 0, & 2l < x \le \pi. \end{cases}$$

(4) أوجد الصيغة العقدية للدالة :

$$f(x) = e^x, -2 \le x \le 0$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الثالث (Chapter Three)

دوال جاما و بيتا

Gamma and Beta functions

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

دوال جاما و بيتا Gamma and Beta functions

1.3. دالة جاما: (Gamma function)

عرفت جاما على يد العالم الرياضي السويسري أويلر عام 1729 مستخدما في تعريفه الضرب اللامنتهي

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}.$$

فادا كانت z متغير مركب أي أن $z = x + iy$ فإن حاصل ضرب أويلر للدالة $\Gamma(z)$ يتقارب عند أي قيمة منتهية z باستثناء $(z = 0, -1, -2, \ldots.)$ ، و بذلك فإن الدالة تكون تحليلية عند أي قيمة منتهية z باستثناء النقاط الشاذة المذكورة. و كان أول من استعمل الرمز $\Gamma(z)$ و أعطى اسم دالة جاما العالم الرياضي الفرنسي ليجندر عام 1814.

ومن حاصل الضرب اللامنتهي للدالة $\Gamma(z)$ اشتقت الصيغة :

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

هذا التكامل يكون متقارب فقط عندما يكون الجزء الحقيقي للعدد موجبا. و حيث إن المتغير يكون في الغالب مقتصرا ومقيدا بالقيم الحقيقية، من أجل ذلك نكتب التعريف الأساسي لدالة جاما بالشكل الآتي:

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

و يمكن استنتاج ذلك التعريف لدالة جاما بالشكل الآتي :

بما أنه لدينا التكامل المعروف :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-qx}dx = q^{-1}$$

إذاً بتفاضل الطرفين بالنسبة للقيمة الثابتة q لعدد n من المرات نجد

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\frac{\partial}{\partial q}\int_0^{+\infty} e^{-qx}dx = \frac{\partial}{\partial q}q^{-1} \Rightarrow \int_0^{+\infty} -xe^{-qx}dx = -q^{-2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-qx}dx = q^{-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\int_0^{+\infty} e^{-qx}dx = \frac{\partial^2}{\partial q^2}q^{-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} (-x)^2 e^{-qx}dx = (-1)(-2)q^{-3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^2 e^{-qx}dx = 2q^{-3}$$

لذلك فإن

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-qx}dx = n!\, q^{-(n+1)}$$

و بوضع الثابت $q = 1$ نحصل على :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n!$$

و بذلك نحصل على تعريف لدالة جاما بالشكل :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.1.3. بعض خواص دالة جاما (Some properties of Gamma function)

في هذا البند ندرس بعض الخواص المهمة لدالة جاما.

1- لدينا $\Gamma(1) = 1.$

الإثبات : من التعريف نجد أن :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ -2

الإثبات : من التعريف لدينا :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x > 0$$

إذَا يكونَ :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x}dt, \qquad x > 0$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t}t^{x}|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

عندما $t \to +\infty$ فان $e^{-t} \to 0$ و يكون :

$$\Longrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

ملاحظة : من الخاصية 2 أعلاه يمكن كتابة الدالة جاما بالشكل الآتي :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

و كذلك نستنتج أن :

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1).$$

3- لدينا $\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

الإثبات : من الخاصية 2 لدينا :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

و لأجل n عدد طبيعي :

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و من الملاحظة أعلاه نجد أن :

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \dots\dots.3.2.1 = n!$$

4- لأجل $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ يكون :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta \, d\theta$$

الإثبات : من تعريف دالة جاما :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad x > 0$$

نفرض $t = u^2$ اذاً $dt = 2udu$ و بذلك يكون :

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2(x-1)}udu$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du$$

بالمثل لأجل $y > 0$ يكون :

$$\Gamma(y) = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}v^{2y-1}dv$$

و بذلك يكون :

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و باستعمال الإحداثيات القطبية :

$$u = r\cos\theta, \qquad v = r\sin\theta, \qquad 0 < r < +\infty, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 = r^2$$

بذلك يكون :

$$\Gamma(x)\Gamma(\mathrm{y}) = 4\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x-1} r^{2y-1} r dr\right) cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2x+2y-2} r dr\right) cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} r^{2(x+y-1)} 2re^{-r^2} dr\right)\left(2\int_0^{+\infty} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta\right)$$

في التكامل الأول فقط نفرض $r^2 = w$ نحصل على :

$$\Gamma(x)\Gamma(\mathrm{y}) = \left(\int_0^{+\infty} w^{x+y-1} e^{-w} dw\right)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta\right)$$

$$= \Gamma(x+y)\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta\right)$$

بذلك نحصل من العلاقة أعلاه على:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\mathrm{y})}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

2.1.3. أمثلة : (Examples)

مثال 1 : بين ان $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

الحل : من الخاصية 4 يكون :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta$$

بوضع $x=y=\frac{1}{2}$ في العلاقة أعلاه نحصل على :

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

و من الخاصية 1 يكون :

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=2.\frac{\pi}{2}=\pi$$

و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

مثال 2 : أثبت أن

$$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}du\,,\qquad x>0$$

الحل : من التعريف لدينا :

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\,,\qquad x>0$$

نفرض $t=u^2$ إذاً $dt=2udu$ ونهايتي التكامل تبقى كما هي و بذلك يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2(x-1)}(2udu) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2x-1}du\,, \qquad x > 0.$$

مثال 3 : أثبت أن

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$$

الحل: نفرض أن $t = -\ln x$ و بذلك يكون : $t = \ln\frac{1}{x} \Leftarrow$

$$e^t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}dt$$

حدود التكامل عندما $x \to 0$ فإن $t \to +\infty$:

و عندما $x \to 1$ فان $t \to 0$ وبذلك نجد أن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = -\int_{+\infty}^0 e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

حيث إننا استخدمنا مثال 1.

2.3. دالة بيتا : (Beta function)

تعرف الدالة بيتا بالصيغة الآتية:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,, \qquad x,y \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0$$

فإذا كانت $x > 1$ و $y > 1$ فإن التكامل يكون صحيحا، لأن التكامل يكون دالة مستمرة في t عندما $0 \le t \le 1$.

و إذا كانت $x < 1, y < 1$ فإن التكامل يكون معتلا لأن t^{x-1} أو $(1-t)^{y-1}$ يكون غير منته عند نقطة نهاية الفترة $0 \le t \le 1$. و بذلك يمكن كتابة الدالة بيتا بالشكل الآتي :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$$=\int_0^c \frac{1}{t^{1-x}}\frac{1}{(1-t)^{1-y}}dt$$

$$+\int_c^1 \frac{1}{t^{1-x}}\frac{1}{(1-t)^{1-y}}dt,\quad 0<c<1$$

نلاحظ أن الدالة $\frac{1}{(1-t)^{1-}}$ في التكامل الأول مستمرة عندما $0\le t\le c<1$ و بالتالي فإن التكامل الأول يكون متقارب عندما و فقط عندما التكامل $\int_0^c \frac{1}{t^{1-x}}dt$ يكون متقارب أي عندما $1-x<1$

و يكون ذلك محققاً عندما $x>0$. و بالمثل يكون التكامل الثاني متقارب عندما $y>0$.

نستنتج من هذا أن تكامل الطرف الأيسر يكون متقارب عندما و فقط عندما يكون $x>0, y>0$.

1.2.3.بعض خواص دالة بيتا : (Some properties of Beta function)

1- الدالة بيتا هي دالة متماثلة (symmetric function)

أي أن :

$$\beta(x,y)=\beta(y,x),\quad x>0,y>0$$

الإثبات : من تعريف دالة بيتا لدينا :

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

نفرض أن $u=1-t$ اذاً $dt=-du$ و عندما $t\to 0$ فإن $u\to 1$ و عندما $t\to 1$ فإن $u\to 0$ و بذلك نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\beta(x,y) = -\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du = \beta(y,x).$$

2- لدينا الخاصية الآتية :

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta$$

الإثبات : من التعريف لدينا :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,, \quad x>0, y>0$$

نفرض أن $t = cos^2\theta$ فإن $dt = -2\cos\theta\sin\theta d\theta$ و عندما $t \to 0$ فان $\theta \to \frac{\pi}{2}$ و عندما $t \to 1$ فإن $\theta \to 0$ و بذلك نحصل على :

$$\beta(x,y) = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 cos^{2x-2}\theta sin^{2y-2}\theta\cos\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta.$$

3- الخاصية الآتية توضح العلاقة بين دالة بيتا و دالة جاما :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

الإثبات : من الخاصية 2 لدينا :

$$\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta \qquad (2)$$

و باستعمال الخاصية 4 من خواص دالة جاما أي :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2x-1}\theta sin^{2y-1}\theta d\theta. \qquad (3)$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن من العلاقة (2) يساوى تماماً الطرف الأيمن من العلاقة (3) و بذلك يكون :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

4- لدينا الخاصية الآتية :

$$\beta(x,1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1} du$$

الإثبات : من تعريف دالة بيتا

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,, \quad x>0, \qquad y>0$$

نفرض أن $u = \frac{t}{1-t}$ و بذلك يكون $t = \frac{u}{u+1}$ اذاً $dt = \frac{du}{(u+1)^2}$ وكذلك عندما $t \to 0$ فإن $u \to 0$ وعندما $t \to 1$ فإن $u \to +\infty$ إذاً يكون :

$$\beta(x,1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x-1}} \frac{1}{(u+1)^{-x}} \frac{du}{(u+1)^2}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1} du.$$

2.2.3. تطبيقات : (Applications)

مثال1 : أثبت أن

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الحل : لدينا :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=(n-\frac{1}{2})\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(n-\frac{1}{2})\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right)=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})$$

و هكذا نستمر حتى نحصل على :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\dots\dots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$=\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-3}{2}.\frac{2n-5}{2}\dots\dots\dots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{\frac{2n}{2}.\frac{2n-1}{2}.\frac{2n-2}{2}.\frac{2n-3}{2}.\frac{2n-4}{2}.\frac{2n-5}{2}\dots\dots.\frac{4}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\frac{2n}{2}.\frac{2n-2}{2}.\frac{2n-4}{2}\dots\dots.\frac{4}{2}.\frac{2}{2}.}$$

$$=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}.$$

مثال 2 : إذا كان

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

فبرهن أن :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^p}dt=\frac{\pi}{2\Gamma(\mathrm{p})\cos(\frac{p\pi}{2})}$$

الحل : من تعريف دالة جاما :

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{p-1}du$$

نفرض أن $u=tv$ .. إذاً .. $du=tdv$ و بذلك يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tv}(tv)^{p-1}tdv = \int_0^{+\infty} e^{-tv}v^{p-1}t^p dv$$

بقسمة الطرفين على $t^p\Gamma(p)$ نجد أن :

$$\frac{1}{t^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} e^{-tv}v^{p-1}dv$$

بضرب الطرفين في $cos\, t$ و المكاملة بالنسبة لـ t من الصفر إلى ما لا نهاية نجد أن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^p}dt = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-tv}v^{p-1}\cos t\, dvdt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt\right]v^{p-1}dv \qquad (4)$$

بمكاملة المقدار ما بين القوسين بالتجزئة نجد أن :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt = \left[e^{-tv}\sin t|_0^{+\infty} + v\int_0^{+\infty} e^{-tv}\sin t\, dt\right]$$

عندما $t \to +\infty$ فإن $e^{-tv} \to 0$ و بإجراء عملية التكامل بالتجزئة مره أخرى نحصل على :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt = \left[-ve^{-tv}\cos t|_0^{+\infty} - v^2\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt\right]$$

$$= v - v^2\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt$$

بذلك يكون :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\, dt = \frac{v}{1+v^2}$$

الأن نفرض أن $v^2 = w$ إذاً $2vdv = dw$ و بذلك يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\int_0^{+\infty} e^{-tv}\cos t\,dt = \frac{w^{\frac{1}{2}}}{1+w}$$

بتعويض هذه العلاقة الأخيرة في العلاقة (4) ينتج أن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^p}dt = \frac{1}{2\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{1+w} w^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} \frac{w^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}}{1+w}dw$$

بما أن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

فإن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^p}dt = \frac{1}{2\Gamma(p)}\frac{\pi}{\sin\left((\frac{p+1}{2})\pi\right)}$$

حيث أن :

$$\sin\left((\frac{p+1}{2})\pi\right) = \sin\left(\frac{p}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin(\frac{p}{2}\pi)\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos\left(\frac{p}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\frac{p}{2}\pi)$$

بذلك فإن :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^p}dt = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(\frac{p}{2}\pi\right)}.$$

3.3. تمارين : (Exercises)

1- أثبت صحة العلاقات الرياضية الآتية:

(1) $$\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}t\right)e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}}.$$

(2) $$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

2- احسب قيم التكاملات الآتية :

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x cos^m\, x dx, \qquad n, m = 1,2, \dots \dots .$

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(5) $\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x^{\frac{1}{3}}} dx$

(6) $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(7) $\beta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

(8) $\int_0^{\pi} cos^{2n}\theta d\theta$

(9) $\int_0^{\pi} sin\theta\, d\theta.$

(10) $\int_0^{1} \frac{du}{(1-u^2)(2-u^2)} du.$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

Chapter Four الفصل الرابع

التحويلات التكاملية

Integral transformations

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

1.4. مقدمة عامة عن التحويلات التكاملية

من أهم التحويلات التكاملية التي نتطرق لدراستها في هذا الفصل هي تحويل فورييه، تحويل لابلاس وتحويل ميلين. يستخدم تحويل فورييه و تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية و التكاملية و كذلك لحل مسائل القيم الابتدائية التي تتكون من معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى و من الرتبة الثانية.

أما تحويل ميلين فهو ينسب إلى عالم الرياضيات الفنلندي ميلين سنة 1854 الذي استنتج هذا التحويل ومعكوسه. تحويل ميلين هو تحويل تكاملي يستخدم في حل العديد من مشاكل الرياضيات البحتة والتطبيقية مثل نظرية المعادلات التفاضلية و التكاملية. و كذلك يستخدم في التطبيقات الفيزيائية.

2.4. تحويل فورييه : (Fourier transform)

كما رأينا في الباب السابق إن الصورة العقدية لمتسلسلة فورييه هي :

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{\frac{-in\pi}{l}x}, \quad \beta_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{\frac{in\pi}{l}t}dt.$$

فإذا وضعنا في الصورة العقدية لمتسلسلة فورييه الفرضيات الآتية :

$$w_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \Delta w_n = \frac{\pi}{l}$$

فإنه يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$S(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(w_n)e^{-iw_n x}\frac{\pi}{l}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(w_n)e^{-iw_n x}\,\Delta w_n \qquad (1)$$

و حيث إن :

$$f(w_n) = \int_{-l}^{l} f(t)e^{iw_n t}dt$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و إذا ما افترضنا أن الدالة f قابلة للتكامل مطلقا على $\mathbb{R}$ فإنه يمكن السماح في التكامل لـ l بحيث تؤول إلى ما لانهاية فيكون عندئذ :

$$f(w_n) = \int_{-l}^{l} f(t)e^{iw_n t}dt, \qquad l \to +\infty$$

$$\Longrightarrow f(w_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iw_n t}dt$$

و يكون كذلك $w_n \to w_0$, $\Delta w_n \to dw$ و يصبح المجموع (1) هو مجموع ريمان و تأخذ المتسلسلة شكل التكامل الآتي :

$$S(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{-iwx}dw$$

و أصبحت متسلسلة فوريه تأخذ شكل ما يسمى بتحويل فوريه (Fourier transform) حيث يرمز له بالرمز $\mathcal{F}(f)$ أو $\hat{f}$ و يكون :

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt := F(w) \qquad (2)$$

و يكون معكوس تحويل فوريه :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}dw := f(x) \qquad (3)$$

و يسمى تحويل فوريه العكسي (Inverse Fourier transform) و يكون :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \begin{cases} f(x), & \text{عندما } f \text{ تكون مستمرة عند } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & \text{عندما } f \text{ تكون ليست مستمرة عند } x \end{cases}$$

نظرية 1 :

(1) لأي دالة f قابلة للتكامل مطلقا على الفترة $]-\infty, a]$ يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{a}^{+\infty} f(t)\sin ktdt = 0,$$

(2)لأي دالة f قابلة للتكامل مطلقا على الفترة $]-\infty, b]$ يكون :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{b} f(t)\sin ktdt = 0,$$

(3)لأي دالة f قابلة للتكامل مطلقا على $\mathbb{R}$ يكون :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ktdt = 0.$$

نظرية 2 :

لتكن f دالة قابلة للتكامل مطلقا على $\mathbb{R}$ و إذا وجدت المشتقات اليمنى و اليسرى للدالة f فإن تحويل فوريه يكون كالأتى :

$$\mathcal{F}(f) := F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

و معكوسه يكون :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}dw := f(x)$$

حيث

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \begin{cases} f(x), & \text{عندما } f \text{ تكون مستمرة عند } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & \text{عندما } f \text{ تكون ليست مستمرة عند } x. \end{cases}$$

الإثبات : لدينا من التعريف

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}dw$$

إذاً بالتعويض عن $F(w)$ كما في المعادلة (2) ينتج أن :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwx}dw \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} e^{-iwx}dw \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

بتغيير ترتيب التكامل نحصل على :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \int_{-k}^{k} e^{i(t-x)w}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{e^{i(t-x)k} - e^{-i(t-x)k}}{i(t-x)}\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{\sin((t-x)k)}{t-x}\right]dt$$

الأن باستبدال t بـ $t+x$ نحصل على :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{\pi}\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x)\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt$$

و بوضع :

$$I(x,k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+x)\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt \qquad (4)$$

فإنه يمكن بالنسبة لأي عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد العدد σ صغير جداً و كافياً بحيث :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|f(t+x)|dt<\frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

بالتالي المعادلة (4) تكتب بالشكل :

$$I(x,k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\sigma}f(t+x)\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}f(t+x)\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\infty}f(t+x)\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt \tag{6}$$

بأخذ نهاية الطرفين في المعادلة (6) و بتطبيق النظرية (1) ينتج أن :

$$\lim_{k\to\infty}I(x,k)=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}f(t+x)dt\left[\frac{\sin\ k\ t}{t}\right]dt \tag{7}$$

و بتطبيق النظرية (2) في الفصل الثاني نجد أن :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)dt\left[\frac{\sin\ \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

بوضع $m=n+\frac{1}{2}$ نجد أن :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

بذلك يمكن أن نكتب :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\sigma} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$
$$+\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$
$$+\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\sigma}^{\pi} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

بتطبيق نظرية (1) مع مراعاة المساواة السابقة نجد أن :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)dt\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

الطرف الأيمن من المعادلة (7) يمكن أن يكتب بالشكل :

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)dt\left[\frac{\sin\ k\,t}{t}\right]dt$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (kt)-\sin(mt)}{t}\right]dt$$
$$+\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]\sin(mt)\,dt$$
$$+\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (mt)}{2\sin\frac{t}{2}}\right]dt$$

نضع :

$$I_1(x,k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{\sin\ (kt)-\sin(mt)}{t}\right]dt$$

و

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$I_2(x,k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]\sin(mt)\,dt$$

عندئذ يكون :

$$\lim_{k\to+\infty} I(x,k) = \lim_{k\to+\infty}[I_1(x,k)+I_2(x,k)] + \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] \dots\dots (8) \qquad (8)$$

بالنسبة لـ $I_1(x,k)$ نستعمل مبرهنة القيمة الوسطى و حيث أن :

$$\frac{\sin\ (kt)-\sin(mt)}{t}=(k-m)\cos\ (ht) \coloneqq \theta\cos\ (ht)$$

حيث h عدد يقع بين m و k و $\theta<1$ و بذلك يكون :

$$I_1(x,k)=\frac{\theta}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\cos\ (ht)dt$$

$$\Longrightarrow |I_1(x,k)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|f(t+x)\cos\,(ht)|dt\,,\ \ \theta<1$$

باستخدام العلاقة (5) ينتج أن :

$$|I_1(x,k)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}|f(t+x)|dt<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

بالنسبة لـ $I_2(,k)$ لدينا

$$\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\ \sin\frac{t}{2}}\right]$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\cos\frac{t}{2}-1}{t\cos\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}}{-\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}\right] = 0.$$

$$\Longrightarrow I_2(x,k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t+x)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]\sin(mt)\,dt.$$

إذاً فالدالة $\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]$ تكون مستمرة في الفترة $[-,\sigma]$ باعتبار أن قيمتها عند $t=0$ هي الصفر، عليه فهي محدودة على هذه الفترة المغلقة وبالتالي تكون الدالة $\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right]$ قابلة للتكامل مطلقاً على الفترة المغلقة $[-\sigma,\sigma]$. إذاً بتطبيق نظرية (1) يكون :

$$\lim_{k\to\infty} I_2(x,k) = 0.$$

إذاً يمكن إيجاد عدد k بحيث لأي عدد $\psi > 0$ يكون :

$$|I_2(x,k)| < \frac{\sigma}{2}, \qquad k > K \tag{10}$$

من (9) و (10) ينتج أن :

$$\lim_{k\to+\infty}[I_1(x,k)+I_2(x,k)] = 0 \tag{11}$$

بالتعويض بـ (11) في (8) يكون :

$$\lim_{k\to+\infty} I(x,k) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

3.4. تطبيقات (Applications)

ندرس في هذا البند بعض تطبيقات ذبذبة الخيط الحر التي تؤثر في معادلات تفاضلية جزئية.
مثال 1 : (الذبذبة الحرة للخيط)

نفرض لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < l$$

حيث a عدد موجب ثابت، u دالة في (x,t) تمثل إزاحة نقط الخيط في اتجاه المحور y.

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

هذه المعادلة تحكم ذبذبة خيط حر غير واقع تحت تأثير قوة.

إذا كانت نهايتي الخيط مثبتة على محور x عند $x = 0$ ، $x = l$ فإن :

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

ويأخذ الشكل الابتدائي للخيط وضع المنحنى $y = f(x)$ أي :

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < l.$$

تكون في هذه الحالة لذبذبة الخيط المسألة الآتية:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l \end{cases} \tag{12}$$

لحل هذه المسألة، سوف نتبع طريقة ما يسمى بطريقة فصل المتغيرات (كما في المعادلات التفاضلية الجزئية) كالآتي: نفرض أن

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

حيث $X(x)$ دالة في x فقط ، $T(t)$ دالة في t فقط. بالتعويض في المعادلة التفاضلية أعلاه ينتج أن :

$$XT_{tt} - a^2 X_{xx} T = 0$$

بالقسمة على $a^2 XT$ نجد أن :

$$\frac{T_{tt}}{a^2 T} = \frac{X_{xx}}{X} = \lambda, \qquad (\lambda \text{ ثابت})$$

يمكننا هنا افتراض أن λ عدد ثابت إذ أن كل من المتغيرات x، t مستقلين، لذلك يتوفر لدينا المعادلتين:

$$T_{tt} - a^2 \lambda T = 0, \qquad X_{xx} - \lambda X = 0.$$

إذاً نوجد حل كلا منهما

$$\begin{cases} X_{xx} - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

أولاً: بفرض $\lambda > 0$ و ذلك بوضع $\lambda = \alpha^2$ ، α عدد موجب إذاً :

$$X_{xx} - \alpha^2 X = 0$$

المعادلة المميزة هي $r^2 - \alpha^2 = 0$ و بذلك يكون $r = \pm$ إذاً الحل هو :

$$\mathrm{X}(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$$

باستعمال الشروط الابتدائية نجد أن :

$$X(0) = c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

كذلك :

$$X(l) = c_2 \sinh \alpha l = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$$

بالتالي يكون :

$$X \equiv 0,$$

إذاً λ لا يمكن أن تكون موجبة.

ثانياً : نفرض أن $\lambda = 0$ إذاً $X_{xx} = 0$

$$\Longrightarrow \mathrm{X}(x) = c_1 x + c_2$$

و باستعمال الشروط الابتدائية نجد أن :

$$\mathrm{X}(0) = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$$

كذلك :

$$X(l) = c_1 l = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

كذلك λ لا يمكن أن تكون صفراً.

ثالثاً : نفرض أن $\lambda < 0$ إذاً نضع $\lambda = -\alpha^2$ حيث α عدد موجب و بذلك يكون :

$$X_{xx} + \alpha^2 X = 0$$

$$\mathrm{X}(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

باستعمال الشروط الابتدائية نجد أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$X(0) = c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = 0$$

كذلك :

$$X(l) = c_2 \sin \alpha l = 0 \Longrightarrow c_2 \neq 0, \quad \sin \alpha l = 0$$

بالتالي يكون :

$$\alpha l = n\pi, \quad n = 1,2, \ldots$$

بذلك نحصل على القيم الذاتية لأجل $n \geq 1$:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \geq 1$$

الدوال الذاتية المناظرة هي :

$$X_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad n \geq 1.$$

نوجد الآن حل المعادلة $T_{tt} - a^2\lambda T = 0$ و ذلك بالتعويض عن قيمة $\lambda = -\alpha^2$ إذاً ينتج أن :

$$T_{tt} + a^2\alpha_n^2 T = 0$$

$$\Longrightarrow T_n(t) = c_n \cos\ (a\alpha_n t) + d_n \sin(a\alpha_n t)$$

حيث c_n و d_n ثوابت اختيارية. و بذلك نجد أن :

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$= [c_n \cos\ (a\alpha_n t) + d_n \sin(a\alpha_n t)\ ] \sin \alpha_n x, \quad n \geq 1.$$

وهو الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية و الشروط الحدية. و لكي تتحقق الشروط الابتدائية نفرض أن :

$$u(x,\mathrm{t}) = \sum_{n\geq 1} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n\geq 1} [c_n \cos\ (a\alpha_n t) + d_n \sin(a\alpha_n t)\ ] \sin \alpha_n x \qquad (13)$$

باستعمال الشرط الابتدائي الأول $u(x,0) = f(x)$ نجد أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$u(x,0)=\sum_{n\geq 1} c_n \sin \alpha_n x = f(x)$$

لاحظ أن هذه العلاقة هي مفكوك متسلسلة فورييه الجيبي للدالة $f(x)$ كما رأينا ذلك في الباب الثاني. إذاً يكون :

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(u)\sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)du$$

و باستعمال الشرط الابتدائي الثاني $u_t(x,0)=\mathrm{g}(x)$ نجد أن :

$$u_t(x,\mathrm{t})=\sum_{n\geq 1}[-c_n\, a\, \alpha_n \sin\ (a\alpha_n t)+d_n\, a\, \alpha_n \cos(a\alpha_n t)\,]\sin\alpha_n x$$

$$\Longrightarrow u_t(x,0)=\sum_{n\geq 1} d_n\, a\, \alpha_n \sin\alpha_n x = g(x).$$

لاحظ أن هذه العلاقة هي مفكوك متسلسلة فورييه الجيبي للدالة $\mathrm{g}(x)$ كما رأينا ذلك في الباب الثاني. إذاً يكون :

$$d_n=\frac{2}{\frac{an\pi}{l}l}\int_0^l g(u)\sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)du=\frac{2}{an\pi}\int_0^l g(u)\sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)du$$

إذاً بالتعويض عن قيمة c_n ، d_n α_n في العلاقة (13) نحصل على الحل العام للمسألة (12) :

$$u(x,\mathrm{t})=\sum_{n\geq 1}\left[\left\{\frac{2}{l}\int_0^l f(u)\sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)du\right\}\cos\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)+\left\{\frac{2}{an\pi}\int_0^l g(u)\sin\left(\frac{n\pi}{l}u\right)du\right\}\sin\left(a\frac{n\pi}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad (14)$$

مثال 2 : أوجد حل مسألة ذبذبة الخيط الحر الأتية :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 2 \end{cases} \\ u_t(x,0) = x(x-2) \end{cases}$$

الحل : باستخدام العلاقة (14) في المثال السابق نجد أن $l = 2$

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \left[c_n \cos\left(a\frac{n\pi}{2}t\right) + d_n \sin\left(a\frac{n\pi}{2}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \qquad (15)$$

نوجد قيم المعاملات c_n و d_n كالآتي :

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 1} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow c_n = \frac{2}{2}\int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{2}{2}\int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx := I_1 + I_2.$$

حيث:

$$I_1 = \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) du$$

$$= \left[-x\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

و

$$I_2 = \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$I_2 = \left[-\frac{2(2-x)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}x)\right]_1^2$$

$$= \left[0 - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(n\pi)\right] - \left[\frac{-2(1)}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}).$$

هذا يؤدى إلى أن :

$$\Longrightarrow c_n = -\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n \text{ عدد زوجي} \\ \frac{8}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

و حيث أن :

$$u_t(x,0) = x(x-2)$$

إذاً يكون :

$$u_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} d_n a\frac{n\pi}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = x(x-2)$$

$$\Longrightarrow d_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^2 x(x-2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة كما سبق (تترك كتمرين للقارئ)، نحصل على حل المسألة المطلوبة بعد التعويض عن قيم المعاملات c_n و d_n في العلاقة (15) .

4.4. تحويل فورييه للدوال الزوجية (Fourier transform for even functions):

نعلم أن الدالة f تكون زوجية إذا حققت العلاقة الرياضية :

$$f(-x) = f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

الآن تذكر أن:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt := \mathrm{F}(w) \tag{16}$$

العلاقة (16) يمكن أن تكتب بالشكل:

$$\mathrm{F(w)} = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt \tag{17}$$

باستبدال t بـ $-t$ في التكامل الأول من العلاقة (17) نحصل على :

$$\mathrm{F(w)} = -\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt \tag{18}$$

إذاَ نضع $f(-t) = f(t)$ في التكامل الأول من العلاقة (18) نحصل على :

$$\mathrm{F(w)} = -\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} 2\,f(t)\left[\frac{e^{-iwt} + e^{iwt}}{2}\right]dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\,(wt)\,dt$$

(19)

العلاقة (19) تسمى بتحويل فوريه للدوال الزوجية و يرمز له بالرمز $F_c(\mathrm{w})$ و نكتب :

$$\mathcal{F}_c[f(x)] = \int_{0}^{\infty} f(t)\cos\,(wt)\,dt := F_c(w)$$

إذاَ نستنتج أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$F(w) = 2F_c(\mathrm{w}) \qquad (20)$$

الآن نوجد معكوس التحويل و ذلك بالتعويض بالعلاقة (20) في العلاقة الآتية :

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}dw := F^{-1}(w) \qquad (21)$$

نحصل على :

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} 2F_c(w)e^{-iwx}dw \qquad (22)$$

و بما أن :

$$\cos\ (wx) = \frac{e^{iwx}+e^{-iwx}}{2} \qquad \text{و} \qquad \sin\ (wx) = \frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}$$

إذاً نستنتج أن :

$$\cos\ (wx) - i\ sin\ (wx) = e^{-iwx} \ldots\ldots (23) \qquad (23)$$

بوضع العلاقة (23) في العلاقة (22) نحصل على :

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(w)\cos\ (wx)\,dw - \frac{2i}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(w)\sin\ (wx)\,dw \qquad (24)$$

بمساواة الجزئيين الحقيقيين والتخيليين في طرفي العلاقة (24) نحصل على:

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(w)\cos\ (wx)\,dw \qquad (25)$$

العلاقة (25) تسمى معكوس تحويل فوريه للدوال الزوجية و يرمز له بالرمز $F_c^{-1}(w)$.

5.4. تحويل فوريه للدوال الفردية (Fourier transform for odd functions):

نعلم أن الدالة f تكون فردية إذا حققت العلاقة الرياضية الآتية :

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

باستبدال t بـ $-t$ في التكامل الأول من العلاقة (17) نحصل على :

$$\mathrm{F(w)} = -\int_{-\infty}^{0} f(-t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt \qquad (26)$$

إذاً بوضع $f(-\mathrm{t}) = -f(\mathrm{t})$ في التكامل الأول من العلاقة (26) كما سبق نحصل على :

$$\mathrm{F(w)} = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty} f(t)\left[\frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}\right]dt$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\,(wt)\,dt \qquad (27)$$

العلاقة (27) تسمى بتحويل فوريه للدوال الفردية و يرمز له بالرمز $F_s(\mathrm{w})$ أي أن :

$$\mathcal{F}_s[f(x)] = \int_{0}^{\infty} f(t)\sin\,(wt)\,dt := F_s(\mathrm{w})$$

و بذلك نستنتج أن :

$$F(w) = 2iF_s(\mathrm{w}) \qquad (28)$$

الآن نوجد معكوس التحويل كما سبق بالتعويض بالعلاقة (28) في العلاقة:

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{-iwx}dw \qquad (29)$$

نحصل على:

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} 2iF_s(w)e^{-iwx}dw \qquad (30)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بوضع العلاقة (23) في العلاقة (30) نحصل على :

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2i}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(w)\cos\ (wx)\,dw + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(w)\sin\ (wx)\,dw \qquad (31)$$

بمساواة الجزئيين الحقيقيين والتخيليين في طرفي العلاقة (31) نحصل على :

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(w)\sin\ (wx)\,dw \qquad (32)$$

العلاقة (32) تسمى معكوس تحويل فوريه للدوال الفردية ويرمز له بالرمز $F_s^{-1}(w)$.

6.4.أمثلة (Examples):

مثال 1 : إذا كانت الدالة f تعطى على صورة :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

أوجد تحويل فوريه للدالة f .

الحل : من التعريف لدينا :

$$\mathrm{F(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \int_{-a}^{a} 1.e^{iwx}dx$$

$$= \frac{e^{iwx}}{iw}\Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{iwa} - e^{-iwa}}{iw} = \frac{2\sin wa}{w}.$$

مثال 2 : أوجد تحويل فوريه للدالة $f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0, \quad x > 0$

الحل : من التعريف لدينا :

$$\mathrm{F(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{iwx}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a+iw)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-a+iw)x}dx$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \left[\frac{e^{(a+iw)x}}{a+iw}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-a+iw)x}}{-a+iw}\right]_{0}^{\infty}$$

الآن نستعمل:

$$\lim_{z\to\infty} e^{z} = \begin{cases} \infty, & Re\, z > 0, \\ 0, & Re\, z < 0. \end{cases}$$

$$F(w) = \frac{1}{a+iw} - \frac{1}{-a+iw} = \frac{2a}{a^2+w^2}.$$

مثال 3 : أوجد تحويل فوريه الجيبي للدالة $f(x) = e^{-ax}, \quad a > 0, \quad x > 0$

الحل : من التعريف لدينا :

$$F_s(w) = \int_0^{\infty} f(t)\sin wt\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\sin wt\, dt$$

بعد إجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$F_s(w) = \left[e^{-at}\left(\frac{-\cos wt}{w}\right)\right]_0^{\infty} - \frac{a}{w}\int_0^{\infty} e^{-at}\cos wt\, dt$$

نكامل مرة أخرى بالتجزئة نحصل على :

$$F_s(w) = \frac{1}{w} - \frac{a}{w}\left[e^{-at}\left(\frac{\sin wt}{w}\right)\right]_0^{\infty} - \frac{a^2}{w^2}\int_0^{\infty} e^{-at}\sin wt\, dt$$

$$= \frac{1}{w} - \frac{a^2}{w^2}\int_0^{\infty} e^{-at}\sin wt\, dt$$

و بذلك يكون :

$$\int_0^{\infty} e^{-at}\sin wt\, dt = \frac{1}{w} - \frac{a^2}{w^2}\int_0^{\infty} e^{-at}\sin wt\, dt$$

هذا يؤدى إلى أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\left(1+\frac{a^2}{w^2}\right)\int_0^\infty e^{-at}\sin wt\,dt=\frac{1}{w}$$

إذاً نستنتج أن :

$$\int_0^\infty e^{-at}\sin wt\,dt=\frac{w}{w^2+a^2}.$$

مثال 4: إذا كانت $F(w)=e^{-aw^2},\quad a>0$ أوجد $f(x)$

الحل : لدينا

$$f(x)=F^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aw^2}e^{-iwx}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aw^2}[\cos wx-i\sin wx]dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aw^2}\cos wx\,dw-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aw^2}\sin wx\,dw$$

$$:=I_1(x)+I_2(x) \qquad (33)$$

حيث :

$$I_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-aw^2}\cos wx\,dw=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-aw^2}\cos wx\,dw$$

$$I_2(x)=0 \qquad (34)$$

لإيجاد قيمة التكامل $I_1(x)$ نفاضل الطرفين بالنسبة إلى x بمعنى أخر نحول المعادلة التكاملية $I_1(x)$ إلى معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية ثم نقوم بحل هذه المسألة الأخيرة لإيجاد قيمة التكامل $\grave{I}_1(x)$ و كالآتي :

$$\grave{I}_1(x)=-\frac{w}{\pi}\int_0^\infty e^{-aw^2}\sin wx\,dw$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بعد إجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\grave{I}_1(x) = -\frac{1}{\pi}\left[\sin wx\left(\frac{-1}{2a}\right)e^{-aw^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2a}\int_0^\infty x\, e^{-aw^2}\cos wx\, dw\right]$$

$$= \frac{-x}{2a\pi}\int_0^\infty e^{-aw^2}\cos wx\, dw = \frac{-x}{2a}I_1(x),$$

و بذلك نحصل على :

$$\grave{I}_1(x) + \frac{x}{2a}I_1(x) = 0$$

نوجد الأن شرط ابتدائي عندما $x = 0$ نحصل على

$$I_1(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-aw^2}\cos(0)\, dw = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-aw^2}dw = \frac{1}{\pi}I(0) \qquad (35)$$

حيث :

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-aw^2}dw \qquad (36)$$

إذاً لإيجاد قيمة التكامل $I_1(0)$ يجب إيجاد قيمة $I(0)$. لأجل ذلك نربع طرفي العلاقة (36) كالآتي :

$$I^2(0) = \left(\int_0^\infty e^{-aw^2}dw\right)\left(\int_0^\infty e^{-a\mu^2}dw\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a(w^2+\mu^2)}dwd\mu$$

باستخدام الإحداثيات القطبية :

$$\mathrm{w} = r\cos\theta, \qquad 0 < r < \infty$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mu = r\sin\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

و بذلك يكون :

$$I^2(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{-2a}{-2a} e^{-ar^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{2a} e^{-ar^2}\Big|_0^{\infty} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2a} d\theta = \frac{\pi}{4a}.$$

و بذلك نستنتج أن :

$$I(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \tag{37}$$

بالتعويض بالعلاقة (37) في العلاقة (35) ينتج أن :

$$I_1(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}$$

إذاً نحصل على المسألة الآتية :

$$\begin{cases} \grave{I_1}(x) + \dfrac{x}{2a} I_1(x) = 0, \\ I_1(0) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a}} \end{cases} \tag{38}$$

نوجد حل المسألة (38) كالآتي :

$$\frac{dI_1}{dx} = \frac{-x}{2a} I_1 \Rightarrow \frac{dI_1}{I_1} = \frac{-x}{2a} dx$$

بتكامل الطرفين نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\ln I_1(x) = \frac{-x^2}{4a} \Longrightarrow I_1(x) = ce^{\frac{-x^2}{4a}}$$

باستعمال الشرط الابتدائي نجد أن:

$$I_1(0) = c = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}$$

إذاً:

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{\frac{-x^2}{4a}} \qquad (39)$$

بالتعويض بالعلاقتين (34) و (39) في العلاقة (33) نحصل على :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{\frac{-x^2}{4a}}.$$

مثال 5 : إذا كانت الدالة معرفة بالشكل الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ x+2, & -2 < x \le -1, \\ 1, & -1 < x \le 1, \\ -x+2, & 1 < x \le 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

اثبت أن للدالة $f(x)$ التمثيل التكاملي:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\cos w - \cos 2w}{w^2}\right] \cos wx \, dw$$

الحل : بأخذ تحويل فوريه للدالة $f(x)$ ينتج أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$F_c(\mathrm{w}) = 0 + \int_{-2}^{-1} (x+2)\cos wx\, dx + \int_{-1}^{1} 1.\cos wx dx + \int_{1}^{2} (-x+2)\cos wx dx + 0 \coloneqq I_1 + I_2 + I_3 \tag{40}$$

حيث:

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} (x+2)\cos wx dx = 0 \tag{41}$$

ذلك لأن :

$$F_c(w) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\ wx dx$$

كذلك :

$$I_2 = \int_{-1}^{1} 1.\cos wx dx = \int_{-1}^{0} 1.\cos wx dx + \int_{0}^{1} 1.\cos wx dx$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\sin wx}{w}\Big|_0^1 = \frac{\sin w}{w} \tag{42}$$

أيضاً :

$$I_3 = \int_{1}^{2} (-x+2)\cos wx dx = (-x+2)\frac{\sin wx}{w}\Big|_1^2 + \frac{1}{w}\int_{1}^{2} \sin wx dx$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= (-2+2)\frac{\sin 2w}{w} - (-1+2)\frac{\sin w}{w} - \frac{1}{w^2}\cos\ wx|_1^2 \qquad (43)$$
$$= -\frac{\sin w}{w} - \left[\frac{\cos 2w - \cos w}{w^2}\right] = -\frac{\sin w}{w} + \frac{\cos w - \cos 2w}{w^2}$$

بالتعويض بالعلاقات (41)، (42) و (43) في العلاقة (40) نجد أن :

$$F_c(\mathrm{w}) = \frac{\sin w}{w} - \frac{\sin w}{w} + \frac{\cos w - \cos 2w}{w^2} = \frac{\cos w - \cos 2w}{w^2}$$

بأخذ التحويل العكسي نحصل على :

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\cos w - \cos 2w}{w^2}\right]\cos wx\ dw.$$

النظرية الآتية توضح بعض خواص تحويل فوريه . برهان هذه النظرية مباشرة من التعريف (يترك كتمرين للقارئ).

نظرية 3: نفرض أن $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ و كذلك $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ دوال قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$ و بفرض أن a,b,k ثوابت فإنه لأي $\mathrm{w}\in\mathbb{R}$ يكون :

$(a)\ \ \mathcal{F}(af+bg) = a\hat{f} + b\hat{g}$ (الخطية).

$(b)\ \ \mathcal{F}\big(f(x+k)\big)(w) = e^{ikw}\hat{f}(w)$ (الازاحة).

$(c)\ \ \mathcal{F}\big(f(kx)\big)(w) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{w}{k}\right),\ \ k\neq 0$ (المقياس).

نظرية 4: (نظرية الالتفاف) : إذا كانت f,g دالتين قابلتين للتكامل على $\mathbb{R}$. نعرف التفاف دالتين $f*g$ بأنه :

$$(f*\mathrm{g})(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du, \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

فإن تحويل فوريه $f*g$ هو :

$$\mathcal{F}[(f*g)(x)](w) = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] = F(w)G(w).$$

الإثبات: بما أن

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}[(f*g)(u)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}dx \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

بتغيير ترتيب التكامل ينتج أن :

$$\mathcal{F}[(f*g)(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}g(x-u)dx$$

الآن نفرض أن $v = x - u$ إذاً $x = v + u$ و بذلك يكون :

$$\mathcal{F}[(f*g)(u)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(v+u)}g(v)dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iwu}du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw\,v}g(v)dv := F(w)G(w).$$

7.4. تحويل فوريه للمشتقات : (Fourier transform for the derivative)

إذا كان لدينا دالة ذات متغير واحد $f(x)$ فإن تحويل فوريه لمشتقات الدالة $f(x)$ يعطى على النحو الآتي :

أولاً : تحويل فوريه للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو : إذا كانت f' قابلة للتكامل فإن :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx. \qquad (44)$$

الإثبات : نكامل الطرف الأيمن من العلاقة (44) بالتجزئة مع افتراض أن :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}[f'(x)] = e^{i\lambda x} f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

و بذلك يكون :

$$\Longrightarrow \mathcal{F}[f'(x)] = -i\lambda \mathcal{F}[f(x)] = -i\lambda F(\lambda) \qquad (45)$$

ثانياً : تحويل فورييه للمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ هو : إذا كانت f'' قابلة للتكامل فإن :

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{i\lambda x} dx \qquad (46)$$

الإثبات : نكامل الطرف الأيمن من العلاقة (46) بالتجزئة مع افتراض أن :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \acute{f}(x) = 0$$

نحصل على :

$$\mathcal{F}[f''(x)] = e^{i\lambda x} \acute{f}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \acute{f}(x) e^{i\lambda x} dx$$

باستعمال العلاقة (45) نجد أن :

$$\mathcal{F}[f''(x)] = (-i\lambda)(-i\lambda) F(\lambda) = -\lambda^2 F(\lambda) \qquad (47)$$

ثالثاً : تحويل فورييه الجيبي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو

$$\mathcal{F}_c[\acute{f}(x)] = \int_0^{\infty} \acute{f}(x) \cos(\lambda x)\, dx \qquad (48)$$

الإثبات : نكامل الطرف الأيمن من العلاقة (48) بالتجزئة مع افتراض أن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

نحصل على :

$$\mathcal{F}_c[\acute{f}(x)] = \cos\ \lambda x\, f(x)|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty f(x) \sin \lambda x\, dx$$

و بذلك يكون :

$$\Longrightarrow \mathcal{F}_c[\acute{f}(x)] = -f(0) + \lambda \mathcal{F}_s[f(x)] \qquad (49)$$

رابعا : تحويل فوريه الجيبي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هو :

$$\mathcal{F}_s[\acute{f}(x)] = \int_0^\infty \acute{f}(x) \sin\ (\lambda x)\, dx \qquad (50)$$

الإثبات : نكامل الطرف الأيمن من العلاقة (50) بالتجزئة مع افتراض أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

نحصل على :

$$\mathcal{F}_s[\acute{f}(x)] = \sin\ \lambda x\, f(x)|_0^\infty - \lambda \int_0^\infty f(x) \cos \lambda x\, dx$$

و بذلك يكون :

$$\Longrightarrow \mathcal{F}_s[\acute{f}(x)] = -\lambda \mathcal{F}_c[f(x)] \qquad (51)$$

يمكننا الأن استنتاج تحويل فوريه التجيبي والجيبي للمشتقة الثانية للدالة $f(x)$ باستخدام العلاقات أعلاه:

$$\mathcal{F}_c\left[\acute{\acute{f}}(x)\right] = -\acute{f}(0) - \lambda^2 \mathcal{F}_c[f(x)] \qquad (52)$$

و كذلك :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}_s\left[\acute{\acute{f}}(x)\right] = \lambda f(0) - \lambda^2 \mathcal{F}_s[f(x)] \tag{53}$$

نبرهن الآن العلاقة (52) :

باستخدام العلاقة (49) نجد أن :

$$\mathcal{F}_c\left[\acute{\acute{f}}(x)\right] = \mathcal{F}_c\left[\left(\acute{f}\right)(x)\right]$$

$$= -\acute{f}(0) + \lambda \mathcal{F}_s\left[\acute{f}(x)\right]$$

و باستخدام العلاقة (51) ينتج :

$$= -\acute{f}(0) - \lambda^2 \mathcal{F}_c[f(x)]$$

إثبات العلاقة (53) : باستخدام العلاقة (51) نجد أن :

$$\mathcal{F}_s\left[\acute{\acute{f}}(x)\right] = -\lambda \mathcal{F}_c\left[\acute{f}(x)\right].$$

و باستخدام العلاقة (49) ينتج :

$$\mathcal{F}_s\left[\acute{\acute{f}}(x)\right] = \lambda f(0) - \lambda^2 \mathcal{F}_s[f(x)].$$

أما إذا كان لدينا دالة ذات متغيرين $f(x,t)$ فإن تحويل فوريه لهذه الدالة $f(x,t)$ و مشتقاتها يعطى على صورة :

$$\mathcal{F}[f(x,t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{i\lambda x} dx := F(\lambda, t),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{i\lambda x} dx := \frac{\partial}{\partial t} F(\lambda, t),$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} e^{i\lambda x} dx \tag{54}$$

إثبات العلاقة (54) : بتكامل العلاقة بالتجزئة مرتين كما سبق نحصل على :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t)\right] = -\lambda^2 F(\lambda,t).$$

ملاحظة : يمكن استخدام تحويل فوريه لحل المعادلات التفاضلية الجزئية.

مثال 1 : بفرض أن $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للتكامل على $\mathbb{R}$. استعمل تحويل فوريه لإثبات أن حل المعادلة التفاضلية :

$$\acute{y} - y = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

يمكن التعبير عليه بالصورة :

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-u)f(u)du$$

حيث k دالة يجب تعيينها.

الحل : بأخذ تحويل فوريه للمعادلة التفاضلية نحصل على :

$$((iw)^2 - 1)\hat{y}(w) = \hat{f}(w)$$

إذاً يكون :

$$\hat{y}(w) = \left(\frac{-1}{1+w^2}\right)\hat{f}(w)$$

باستخدام نظرية الالتفاف نحصل على :

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-u)f(u)du\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث $k(x) = -e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$ تكون حل.

مثال 2 : (معادلة الحرارة) (The heat equation)

استعمل تحويل فوريه لإيجاد $u = u(x,t)$ حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \qquad k \text{ عدد موجب ثابت} \\ u(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الحل : بأخذ تحويل فوريه للمعادلة التفاضلية نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t) = k(iw)^2\hat{u}(w,t)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + kw^2\hat{u} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{kw^2t}\hat{u}\right) = 0$$

$$\hat{u}(w,t) = e^{-kw^2t}g(w).$$

حيث g دالة احتيارية في w. لإيجاد الدالة g نأخذ تحويل فوريه للشرط الابتدائي نجد أن :

$$\hat{u}(w,0) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}$$

و بذلك نجد أن :

$$\hat{u}(w,t) = \sqrt{\pi}e^{-(1+4kt)w^2/4}$$

بأخذ التحويل العكسي نحصل على :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4kt}}e^{-x^2/(1+4kt)}.$$

8.4. تحويل لابلاس (Laplace transform) :

في هذا البند سوف نناقش المفاهيم الأساسية لطريقة تحويل لابلاس. هذه الطريقة تستعمل كما ذكرنا سابقاَ لحل المعادلات التفاضلية و التكاملية و كذلك لحل مسائل القيم الابتدائية التي تتكون من معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى و من الرتبة الثانية.

نذكر القارئ بأن تحويل فوريه للدالة f هو :

$$\mathrm{F(w)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx.$$

و التحويل العكسي هو :

$$F^{-1}(\mathrm{w}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-iwx}dw$$

و بذلك لأجل أي دالة φ قابلة للتكامل مطلقاَ على $\mathbb{R}$ يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Phi_F(\mathrm{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{iwx} dx,$$

$$\Phi_F^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w) e^{-iwx} dw$$

نضع $\varphi(x) = e^{-\alpha x} f(x), x > 0$ حيث α عدد اختيارى ثابت يضمن التكامل مطلقاً للدالة φ على الفترة $[0, \infty[$ و بذلك يكون :

$$F_F\left(e^{-\alpha x} f(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) e^{iwx} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(\alpha - iw)x} dx.$$

و التحويل العكسي هو :

$$F_F^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-iwx} dw$$

الآن بوضع $p = \alpha - iw$ و وضع :

$$F_l(f) = F_F\left(e^{-\alpha x} f(x)\right), \qquad F_l^{-1}(x) = e^{-\alpha x} F_F^{-1}(x).$$

يمكننا تعريف تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ حيث $x \geq 0$ بالشكل الآتي :

$$F_{\mathcal{L}}(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx := \mathcal{L}[f(x)]$$

و التحويل العكسي بالشكل :

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F_{\mathcal{L}}(p) e^{px} dp.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

نظرية 5 :

لتكن f دالة تحقق $f(x)e^{-\alpha x}$ دالة قابلة للتكامل مطلقاً على الفترة $[0,\infty[$ و إذا وجدت المشتقات اليمنى و اليسرى فإن تحويل لابلاس يكون :

$$F_{\mathcal{L}}(p)=\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx := \mathcal{L}[f(x)],$$

و معكوسه هو :

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_{\mathcal{L}}(p)e^{px}dp$$

و يكون :

$$F_{\mathcal{L}}^{-1}(x)=\begin{cases} f(x), & x \text{ تكون مستمرة عند } f \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], & x \text{ تكون غير مستمرة عند } f \end{cases}$$

نعطي الآن بعض الخواص المهمة في تحويل لابلاس.

(1) $\mathcal{L}[\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)]$
$$=\lambda_1\mathcal{L}[f_1(x)]+\lambda_2\mathcal{L}[f_2(x)], \quad \lambda_1\ \lambda_2 \text{ ثوابت اختيارية}$$

(2) $$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{p}$$

(3) $$\mathcal{L}[x^{\mu}]=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}},$$

(4) $$\mathcal{L}[e^{\mu x}]=\frac{1}{p-\mu}$$

(5) $$\mathcal{L}[\cosh \mu x i]=\frac{p}{p^2-\mu^2}$$

(6) $$\mathcal{L}\left[\frac{\sinh \mu x i}{i}\right]=\frac{\mu}{p^2-\mu^2}.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الإثبات : (Proof)

لاحظ أن إثبات العلاقة (1) ينتج مباشرة من التعريف.

نثبت الآن صحة العلاقة (2) و ذلك بإجراء عملية التكامل مباشرة نجد أن :

$$\mathcal{L}\,[1] = \int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \frac{-1}{p}e^{-px}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$

إثبات العلاقة (3) :

$$\mathcal{L}\,[x^{\mu}] = \int_0^{+\infty} x^{\mu}e^{-px}dx$$

نفرض أن $y = px$ فإن $x = \frac{y}{p}$ و بذلك يكون :

$$\mathcal{L}\,[x^{\mu}] = \int_0^{+\infty} \frac{y^{\mu}}{p^{\mu+1}}e^{-y}dy = \frac{1}{p^{\mu+1}}\underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\mu}e^{-y}dy}_{:=\Gamma(\mu+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

إثبات العلاقة (4) :

$$\mathcal{L}\,[e^{\mu x}] = \int_0^{+\infty} e^{-px}e^{\mu x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\mu)x}dx = \frac{-1}{p-\mu}e^{-(p-\mu)x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{p-\mu}.$$

إثبات العلاقة (5) نستخدم تعريف الدوال المثلثية الزائدية :

$$\mathcal{L}\,[\cosh\,\mu xi] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\mu x}+e^{-\mu x}}{2}\right]$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{\mu x}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-\mu x}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\mu} + \frac{1}{p+\mu}\right] = \frac{p}{p^2-\mu^2}.$$

حيث أننا استخدمنا العلاقة (4).

إثبات العلاقة (6) :

$$\mathcal{L}\left[\sinh \mu x\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{\mu x}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-\mu x}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\mu} - \frac{1}{p+\mu}\right] = \frac{\mu}{p^2-\mu^2}.$$

من الخواص (5) و (6) نستنتج ما يلي :

$$\mathcal{L}\left[\cos \mu x\right] = \mathcal{L}\left[\cosh \mu x i\right] = \frac{p}{p^2+\mu^2}$$

و كذلك :

$$\mathcal{L}\left[\sin \mu x\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\sinh \mu x i}{i}\right] = \frac{\mu}{p^2+\mu^2}.$$

تعريف : نعرف الدالة H بالشكل الآتي :

$$[H(x-a)] = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\mathcal{L}[H(x-a)] = \int_a^{+\infty} e^{-px}.1dx$$

$$= \frac{-e^{-px}}{p}\Big|_a^{+\infty} = \frac{e^{-pa}}{p}.$$

إذا كانت $a = 0$ فإن :

$$\mathcal{L}[H(x-a)] = \frac{1}{p}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

نظرية 6 : الدالة $[x]$ تسمى بدالة الصحيح الأعظم وتعرف بالشكل الآتي :

$$[x] = H(x-1) + H(x-2) + \cdots = \sum_{n\geq 1} [H(x-n)].$$

و بذلك فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\mathcal{L}([x]) = \frac{1}{p(e^p - 1)}.$$

الإثبات : لدينا

$$\mathcal{L}([x]) = \sum_{n\geq 1} \mathcal{L}[H(x-n)] = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-pn}}{p} = \frac{1}{p}\sum_{n\geq 1} e^{-pn}$$

$$= \frac{e^{-p}}{p}\sum_{n\geq 1} e^{-(n-1)p} = \frac{e^{-p}}{p}(1 + e^{-p} + e^{-2p} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{p(e^p - 1)}.$$

1.8.4. تحويل لابلاس للمشتقات (Laplace transform for the derivatives)

أولاً : تحويل لابلاس للمشتقة الأولى

يعطى تحويل لابلاس للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالشكل :

$$\mathcal{L}(\acute{f}) = \int_0^{+\infty} \acute{f}(x) e^{-px} dx$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\mathcal{L}(\acute{f}) = p\mathcal{L}(f) - f(0).$$

ثانياً : تحويل لابلاس للمشتقة الثانية

بنفس الطريقة نحصل على :

$$\mathcal{L}\left(\acute{\acute{f}}\right) = p\mathcal{L}(\acute{f}) - \acute{f}(0)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= p^2\mathcal{L}(f) - pf(0) - \acute{f}(0)$$

و كذلك للمشتقة الثالثة :

$$\mathcal{L}\left(f^{(3)}\right) = p^3\mathcal{L}(f) - p^2f(0) - p\acute{f}(0) - \acute{\acute{f}}(0)$$

وهكذا لجميع المشتقات:

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

نظرية الالتفاف 7 : لأى دالتين f و g يكون لدينا :

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) * \mathcal{L}(g).$$

نظرية 8: لدينا

$$\mathcal{L}\left(e^{\mu x}f(x)\right) = F(p-\mu)$$

الإثبات: من التعريف نجد أن :

$$\mathcal{L}\left(e^{\mu x}f(x)\right) = \int_0^{+\infty} e^{\mu x}f(x)e^{-px}dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(p-\mu)x}f(x)dx = F(p-\mu).$$

نظرية 9: لدينا

$$\frac{d^n}{dp^n}\left(F(p)\right) = (-1)^n\mathcal{L}(x^nf(x)).$$

الإثبات: نبرهن المطلوب لأجل $n = 1$ أي نبرهن أن :

$$\frac{d}{dp}(F(p) = -\mathcal{L}\left(xf(x)\right).$$

لأجل ذلك نعوض عن $F(p)$:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\frac{d}{dp}(F(p)) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} xf(x)\,e^{-px}dx$$

$$= -\mathcal{L}\big(xf(x)\big)$$

حيث أننا استخدمنا قاعدة لبنايتز للتفاضل تحت علامة التكامل و بذلك نستنتج أن :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{dp}(F(p)\right) = -xf(x).$$

و هكذا لأجل المشتقة النونية .

2.8.4. أمثلة (Examples):

أوجد تحويل لابلاس لكل من الآتي :

(1) $$\mathcal{L}\big(x^2 - 5x^{3/2} + 7\big) = \mathcal{L}(x^2) - 5\mathcal{L}\big(x^{3/2}\big) + \mathcal{L}(7)$$
$$= \frac{\Gamma(3)}{p^3} - 5\frac{\Gamma(5/2)}{p^{5/2}} + \frac{7}{p}$$

باستخدام خواص دالة جاما الآتية التي سبق دراستها في الفصل الثالث :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ and } \Gamma(1) = 1$$

نجد أن:

$$\mathcal{L}\big(x^2 - 5x^{3/2} + 7\big) = \frac{2\Gamma(2)}{p^3} - 5\frac{3}{2}\frac{\Gamma(3/2)}{p^{5/2}} + \frac{7}{p}$$

$$= \frac{2\Gamma(1+1)}{p^3} - \frac{15}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{p^{5/2}} + \frac{7}{p}$$

$$= \frac{2.1\,\Gamma(1)}{p^3} - \frac{15}{2}.\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{5/2}} + \frac{7}{p}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{2}{p^3} - \frac{15}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{p^{5/2}} + \frac{7}{p}.$$

(2) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{p^2-4}\right) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2-2^2}\right) = \frac{5}{2}\sinh 2x.$$

(3) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2p}{p^2+5}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+5}\right) = 2\cos\sqrt{5}x.$$

(4) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p^2+2p-3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(p+1)^2-4}\right) = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p+1)^2-2^2}\right) =$$

$$\frac{3}{2}e^{-x}\sinh 2x$$

(5) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5p+1}{(p+2)(p+3)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5p+1}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5\left(p+\frac{5}{2}\right)-\frac{23}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= 5\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\left(p+\frac{5}{2}\right)}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}}\right) - 23\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2^2}}\right)$$

$$= 5e^{-\frac{5}{2}x}\cosh\frac{x}{2} - 23\,e^{-\frac{5}{2}x}\sinh\frac{x}{2}.$$

(6) $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right)$$

وبما أن:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin x := f(x) = g(x)$$

إذا باستخدام نظرية الالتفاف 7 نجد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

$$= \int_0^x \sin t\ \sin(x-t)dt$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \int_0^x sin\, t\, (sin\, x \cos t - \cos x\, sin\, t)\, dt$$

$$= sin\, x \int_0^x sin\, t \cos t\, dt - \cos x \int_0^x sin^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}(sin\, x - x \cos x).$$

طريقة أخرى لحل مثال (6): لدينا

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{2-(p^2+1)}{(p^2+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}$$

و بذلك يكون :

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) + \frac{1/2}{p^2+1}$$

إذا:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x \cos x + \sin x).$$

نظرية 10 (إزاحة نقطة الأصل) بما أن :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(x))$$

إذَا يكون لدينا لأجل أي عدد a :

$$\mathcal{L}(f(x-a)) = e^{-ap}F(p).$$

الإثبات : يترك كتمرين للقارئ .

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

ندرس الآن بعض الأمثلة لتوضيح كيفية استخدام تحويل لابلاس لحل مسائل القيم الابتدائية.

مثال1 : باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية :

$$\begin{cases} \acute{\acute{y}} - \acute{y} - 6y = 0 \\ y(0) = 2, \\ \acute{y}(0) = -1 \end{cases}$$

الحل : بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نجد أن :

$$\mathcal{L}(\acute{\acute{y}}) - \mathcal{L}(\acute{y}) - 6\mathcal{L}(y) = 0$$

باستعمال تحويل لابلاس للمشتقات نجد أن :

$$p^2\mathcal{L}(y) - py(0) - \acute{y}(0) - p\mathcal{L}(y) + y(0) - 6\mathcal{L}(y) = 0$$

$$(p^2 - p - 6)\mathcal{L}(y) = 2p - 3$$

ومنها نجد أن:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2p-3}{p^2-p-6} = \frac{2p-3}{(p-3)(p+2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3/5}{p-3} + \frac{7/5}{p+2}$$

بأخذ التحويل العكسي للطرفين نحصل على :

$$y = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-3}\right) + \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)$$

$$= \frac{3}{5}e^{3x} + \frac{7}{5}e^{-2x}.$$

مثال2 : أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$\begin{cases} \acute{\acute{y}} + y = 0 \\ y(0) = 1, \\ \acute{y}(0) = 1 \end{cases}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الحل : بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة نجد أن :

$$\mathcal{L}(\acute{y}) + \mathcal{L}(y) = 0$$

باستعمال تحويل لابلاس للمشتقات نجد أن :

$$(p^2 + 1)\mathcal{L}(y) = 1 + p$$

ومنها نجد أن:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1+p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نحصل على :

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)$$

$$= \sin x + \cos x.$$

9.4. تحويل ميلين (Mellin transform):

تعريف 1: لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $0 < x < \infty$ فإن تحويل ميلين للدالة $f(x)$ يرمز له بالرمز $\mathcal{M}(f(x))$ و يعطى بالعلاقة:

$$\big(\mathcal{M}f\big)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx := F(s).$$

تعريف 2 : التحويل العكسي لميلين $(\mathcal{M}^{-1}f)(x)$ يعرف بالعلاقة :

$$(\mathcal{M}^{-1}F)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\,F(s)ds := f(x).$$

مثال 1: أوجد تحويل ميلين للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = e^{-ax}, \qquad a > 0$$

الحل : من التعريف لدينا :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

و بذلك يكون :

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}x^{s-1}dx$$

نضع $t = ax$ إذاً $x = \frac{t}{a}$ و يكون $dx = \frac{dt}{a}$ و بذلك يكون :

$$(\mathcal{M}f)(s) = a^{-s}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

$$= a^{-s}\,\Gamma(s),$$

تذكر أن الدالة Γ تعرف بالصيغة التكاملية:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

مثال 2 : أوجد تحويل ميلين للدالة $f(x)$ حيث :

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

الحل : من التعريف لدينا :

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

و بذلك يكون :

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}x^{s-1}dx.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

لحساب قيمة التكامل نفرض أن $1+x=\frac{1}{1-t}$ إذاً $x=\frac{t}{1-t}$ و بالتالي يكون :

$1-\mathrm{t}=\frac{1}{1+x}$ عندئذ فإن $dt=\frac{dx}{(x+1)^2}$ إذاً نحصل على :

$$(\mathcal{M}f)(s)=\int_0^1(1-t)\left(\frac{t}{1-t}\right)^{s-1}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$=\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{-s}dt=\beta(s,1-s)$$

تذكر أن الدالة بيتا تعرف بالشكل:

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

باستخدام خواص دالة بيتا التي سبق دراستها في الفصل الثالث:

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

نحصل على:

$$(\mathcal{M}f)(s)=\beta(s,1-s)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1)}$$

$$=\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi}.$$

بعض خواص تحويل ميلين:

$$(1)\quad \mathcal{M}\{f(ax)\}(s)=a^{-s}F(s).$$

الإثبات : من التعريف يكون لدينا :

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s)=\int_0^{+\infty} f(ax)x^{s-1}dx.$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

لحساب قيمة التكامل نفرض أن $t = ax$ إذاً $x = \frac{t}{a}$ و بالتالي يكون $dx = \frac{dt}{a}$ إذاً نجد أن :

$$\mathcal{M}\{f(ax)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{t}{a}\right)^{s-1}\frac{dt}{a}$$

$$= a^{-s}\int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt$$

$$= a^{-s}F(s).$$

بطريقة مماثلة وحسابات بسيطة يمكن برهنة الخواص الآتية تترك كتمارين للقارئ.

(2) $\mathcal{M}\{f(x^a)\}(s) = |a|^{-1}F(a^{-1}s)$, $a \neq 0$, a عدد حقيقي

(3) $\mathcal{M}\{(\ln x)^k f(x)\}(s) = \frac{d^k}{ds^k}F(s)$, k عدد صحيح موجب

(4) $\mathcal{M}\left\{\frac{d^k}{ds^k}f(x)\right\}(s) = (-1)^k(s-k)_k F(s-k)$,

حيث $(s-k)_k$ تعرف بالصيغة :

$$(s-k)_k = (s-k)(s-k+1)\dots\dots(s-1).$$

(5) $\mathcal{M}\left\{\frac{d^k}{ds^k}\left(x^k f(x)\right)\right\}(s) = (-1)^k(s-k)_k F(s)$,

(6) $\mathcal{M}\left\{x^k\frac{d^k}{ds^k}f(x)\right\}(s) = (-1)^k(s)_k F(s)$,

حيث $(s)_k$ تعرف بالصيغة :

$$(s)_k = (s+1)\dots\dots(s+k-1).$$

10.4. تمارين (Exercises) :

(1) أوجد تحويل لابلاس لكل من الآتي :

(a) $\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}+\cos 5x - 3\sin 7x\right)$ (d) $\mathcal{L}(e^x \sin x)$

(b) $\mathcal{L}\left(x^3 - \sinh\frac{x}{2} + 5\cosh 4x\right)$ (e) $\mathcal{L}(1-\cos 2x)$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$(c)\quad \mathcal{L}(x^2e^{5x})$ $(f)\quad \mathcal{L}(x^3\sinh 2x)$ $(g)\quad \mathcal{L}(x^2\cosh 7x)$

(2) أوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من الآتي :

$(h)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p}{p^2-9}\right)$ $(k)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right)$

$(i)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-3)^2}\right)$ $(l)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{2p^2+p-1}\right)$

$(j)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5p}{(p^2-4)^2}\right)$ $(m)\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p^2+1}{p(p-1)^3}\right)$

(3) أوجد حل مسائل القيم الابتدائية الآتية :

$$(n)\quad \begin{cases} \acute{y} - -3\acute{y} + 2y = 0 \\ y(0) = 2, \\ \acute{y}(0) = 3. \end{cases} \qquad (o)\quad \begin{cases} \acute{y} - \acute{y} = 0 \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(p)\quad \begin{cases} \acute{y} + 4y = 4x \\ y(0) = 0, \\ \acute{y}(0) = 1 \end{cases}$$

(4) برهن كل من الخواص الآتية :

$$(1)\quad \mathcal{M}\left\{\frac{d^k}{ds^k}f(x)\right\}(s) = (-1)^k(s-k)_kF(s-k),$$

حيث $(s-k)_k$ تعرف بالصيغة :

$$(s-k)_k = (s-k)(s-k+1)\dots\dots(s-1).$$

$$(2)\quad \mathcal{M}\left\{\frac{d^k}{ds^k}\left(x^kf(x)\right)\right\}(s) = (-1)^k(s-k)_kF(s),$$

$$(3)\quad \mathcal{M}\left\{x^k\frac{d^k}{ds^k}f(x)\right\}(s) = (-1)^k(s)_kF(s),$$

حيث $(s)_k$ تعرف بالصيغة :

$$(s)_k = (s+1)\dots\dots(s+k-1).$$

(5) برهن نظرية إزاحة نقطة الأصل .

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الخامس

(Chapter Five)

دوال بيسيل

Bessel's functions

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

الفصل الخامس (Chapter Five)

دوال بيسيل Bessel's functions

1.5. معادلة بيسيل التفاضلية : (Bessel 's Differential Equation)

تعطى معادلة بيسيل التفاضلية على النحو الآتي :

$$x^2\acute{y} + x\acute{y} + (x^2 - k^2)y = 0 \qquad (1)$$

حيث k ثابت يسمى الدليل. المعادلة (1) هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية و يمكن كتابتها في صورة :

$$\acute{y} + \frac{1}{x}\acute{y} + \left(\frac{x^2 - k^2}{x^2}\right)y = 0$$

فتكون $x = 0$ نقطة شاذة نظامية للمعادلة حيث أن :

$$\lim_{x\to 0}\left[x\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(\frac{x^2 - k^2}{x^2}\right)\right] = -k^2.$$

لاحظ أن كلا من النهايتين موجودتين و بذلك فإن حل المعادلة (1) يكون على صورة متسلسلة فروبينوس التي درست في الفصل الأول :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0$$

تسمى a_n عوامل النشر. بالتعويض عن قيم $y, \acute{y}, \acute{y}$ في المعادلة (1) نجد أن :

$$x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1}$$

$$+(x^2 - k^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n} = 0$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}[(\alpha+n)(\alpha+n-1)+(\alpha+n)-k^2]a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n+2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}[(\alpha+n)^2-k^2]a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n+2} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^2-k^2)a_0 x^{\alpha} + [(\alpha+1)^2-k^2]a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{+\infty}[(\alpha+n)^2-k^2]a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n+2} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^2-k^2)a_0 x^{\alpha} + [(\alpha+1)^2-k^2]a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{+\infty}[((\alpha+n)^2-k^2)a_n + a_{n-2}]x^{\alpha+n} = 0.$$

لكى تتحقق هذه المساواة لأجل $x \in \mathbb{R}$ يجب أن يكون :

$$((\alpha+n)^2-k^2)a_n + a_{n-2} = 0$$

و بذلك عندما $n = 0$ نجد أن :

$$\alpha^2-k^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \mp k, \quad a_0 \neq 0.$$

<u>في حالة $\alpha = k$:</u>

$$[(k+n)^2-k^2]a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow [2kn+n^2]a_n = -a_{n-2}$$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2k)}, \quad n \geq 2.$$

ندرس المعاملات الزوجية أي أن :

عندما $n = 2$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2k)} = -\frac{a_0}{2^2.1(1+k)}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

عندما $n = 4$

$$\Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2k)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4.2.1(2+k)(1+k)}$$

عندما $n = 6$

$$\Rightarrow a_6 = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6.3.2.1(3+k)(2+k)(1+k)}$$

و بذلك فإن المعاملات الفردية كلها أصفار أي أن :

$$a_{2n+1} = 0, \quad n = 0,1,2, \dots \dots \dots$$

إذاً يكون :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}.n\,!\,(n+k)(n+k-1) \dots \dots (1+k)}, n = 0,1, \dots \dots$$

$$= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}.n\,!\,(n+k)!} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}.n\,!\,\Gamma(n+k+1)}.$$

حيث أننا استعملنا الخاصية الآتية التي درست في الفصل السابق :

$$(n+k)! = \Gamma(n+k+1)$$

و بذلك يكون حل متسلسلة فروبينوس لمعادلة بيسيل التفاضلية هو :

$$y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m} x^{2m+k}$$

إذاً :

$$y(x) := a_0 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}.m\,!\,\Gamma(m+k+1)} x^{2m+k}$$

و بما أن $a_0 \neq 0$ فإننا نفرض أن :

$$a_0 = \frac{1}{2^k}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

و بذلك يكون :

$$y_1(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

و يرمز له بالرمز $J_k(x)$ و تسمى دالة بيسيل من النوع الأول ذات الدليل k. و يكون

$$J_k(x) := y_1(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

و بالمثل لأجل $\boldsymbol{\alpha = -k}$ نحصل على :

$$J_{-k}(x) := y_2(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-k}$$

و تسمى بدالة بيسيل من النوع الثاني. و بذلك يكون الحل العام هو :

$$y(x) = AJ_k(x) + BJ_{-k}(x),$$

حيث A, B ثوابت اختيارية و أن $J_k(x), J_{-k}(x)$ دوال مستقلة خطيا.

مثال 1: أوجد حل المعادلة الآتية :

$$x^2\acute{y} + x\acute{y} + \left(x^2 - \frac{1}{25}\right)y = 0$$

الحل : المعادلة هي معادلة بيسيل التفاضلية ذات الدليل $k = \frac{1}{5}$ إذاً الحل العام للمعادلة يكون :

$$y(x) = AJ_{\frac{1}{5}}(x) + BJ_{-\frac{1}{5}}(x)$$

وهذا يتضمن حساب $J_{\frac{1}{5}}(x), J_{-\frac{1}{5}}(x)$ (تترك كتمرين للقارئ).

مثال 2: أوجد حل معادلة بيسيل التفاضلية ذات الدليل $k = \frac{1}{2}$ الآتية :

$$x^2\acute{y} + x\acute{y} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

حل هذه المعادلة هو:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$y(x) = AJ_{\frac{1}{2}}(x) + BJ_{-\frac{1}{2}}(x) \qquad (2)$$

وهذا يتضمن حساب $J_{\frac{1}{2}}(x), J_{-\frac{1}{2}}(x)$ كالآتي : بما أن

$$J_k(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

إذاً بوضع $k = \frac{1}{2}$ في العلاقة الرياضية أعلاه نحصل على :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{0\,!\,\Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1\,!\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\,!\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{4+\frac{1}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1\,!\,\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2\,!\,\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} - \cdots\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

الآن نقوم بحساب $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ كالآتي :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\frac{1}{2}}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \frac{1}{0\,!\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1\,!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\,!\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4-\frac{1}{2}} - \cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1\,!.\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4}}{2\,!\frac{3}{2}.\frac{1}{2}} - \cdots\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد أن:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,[A\sin x + B\cos x].$$

مثال 3: برهن أن

$$J^2_{\frac{1}{2}}(x) + J^2_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

الحل : باستخدام مثال 2 نجد أن :

$$J^2_{\frac{1}{2}}(x) + J^2_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi x}(sin^2\,x + cos^2 x)$$

$$= \frac{2}{\pi x}.$$

مثال 4: إذا كان k عدد صحيح موجب. برهن أن

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x).$$

الإثبات : من التعريف لدينا :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$J_{-k}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m-k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-k}$$

بوضع $m-k=r$ أى $m=k+r$ نحصل على :

$$J_{-k}(x) = \sum_{r=-k}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+r}}{(k+r)\,!\,\Gamma(r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2r}$$

$$= (-1)^k \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r\,!\Gamma(k+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2r}$$

$$= (-1)^k J_k(x).$$

2.5. العلاقات التكرارية لدوال بيسيل (Recurrence Relations for Bessel functions)

في هذا البند سوف ندرس بعض الخواص المهمة التي تمثل العلاقات التكرارية لدوال بيسيل.

$$(a) \qquad \frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)] = -x^{-k}J_{k+1}(x)$$

$$(b) \qquad x\,\grave{J}_k(x) = kJ_k(x) - xJ_{k+1}(x)$$

$$(c) \qquad \frac{d}{dx}[x^{k}J_k(x)] = x^{k}J_{k-1}(x)$$

$$(d) \qquad x\grave{J}_k(x) = -kJ_k(x) + xJ_{k-1}(x)$$

$$(e) \qquad J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}J_k(x) - J_{k-1}(x)$$

$$(f) \qquad \grave{J}_k(x) = \frac{1}{2}[J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)].$$

الإثبات :

(a) نلاحظ أن :

$$x^{-k}J_k(x) = 2^{-k}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

و بذلك يكون :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)] = 2^{-k}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2m}{m\,!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}$$

$$= 2^{-k}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m m}{m(m-1)\,!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}$$

بتغيير دليل المجموع من $m=1$ إلى $m=0$ نحصل على :

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)] = 2^{-k}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m\,!\,\Gamma(m+k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$$

$$= -2^{-k}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$$

$$= -x^{-k}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!\,\Gamma(m+k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k+1}$$

$$= -x^{-k}J_{k+1}(x).$$

(b) باشتقاق حاصل ضرب الدالتين x^{-k} و $J_k(x)$ بالنسبة للمتغير x نجد أن :

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)] = x^{-k}\acute{J}_k(x) - kx^{-k-1}J_k(x) \qquad (3)$$

و من الخاصية الأولى أعلاه نجد :

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(x)] = -x^{-k}J_{k+1}(x) \qquad (4)$$

من العلاقتين (3) و (4) ينتج أن:

$$\Longrightarrow x^{-k}\acute{J}_k(x) - kx^{-(k+1)}J_k(x) = -x^{-k}J_{k+1}(x).$$

بضرب الطرفين في x^{k+1} نحصل على :

$$x\acute{J}_k(x) - kJ_k(x) = -x^{-k}x^{k+1}J_{k+1}(x)$$

بذلك فإن:

$$x\acute{J}_k(x) = kJ_k(x) - xJ_{k+1}(x).$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

■

بالمثل يمكن برهنة العلاقات (c), (d) (تترك كتمارين للقارئ).

سوف نبرهن العلاقتين (e) و (f) باستخدام التابع المولد لدوال بيسيل الذى ندرسه في البند القادم.

3.5. التابع المولد لدوال بيسيل : (Generating function for Bessel functions)

تعريف : يعرف التابع المولد لدوال بيسيل على صورة :

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}, \quad t \neq 0.$$

نظرية 1 : التابع المولد لدوال بيسيل يعبر عنه في صورة متسلسلة بالشكل :

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n.$$

الإثبات : نقوم بنشر الطرف الأيسر في سلسلتين لا نهائيتين :

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}t}.e^{-\frac{x}{2t}}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m\,!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\left(-\frac{x}{2t}\right)^k$$

$$= \sum_{m,k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{m\,!\,k\,!}\, t^{m-k} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k}$$

نضع $m-k=n, -\infty \leq n \leq +\infty$ لذلك نحصل على :

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\,(k+n)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\,\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x).$$

مثال 1: برهن باستخدام التابع المولد أن :

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

الحل: لدينا:

$$g(-x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(-x) \qquad (5)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$g(-x,t) = e^{-\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}\left[-(t-\frac{1}{t})\right]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)(-t)^n$$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(x)(t)^n$	(6)

من (5), (6) نجد أن :

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x).$$

مثال 2 :(خاصية التابع المولد لدوال بيسيل)

$$g(x+y,t) = g(x,t)g(y,t).$$

الإثبات: لدينا

$$g(x+y,t) = e^{(\frac{x+y}{2})(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}.e^{\frac{y}{2}(t-\frac{1}{t})} = g(x,t)g(y,t).$$

مثال 3 : (نظريات جمع دوال بيسيل)

1) $$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_{n-m}(y)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$2) \quad J_0(x+y) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} J_m(x)J_{-m}(y)$$

الإثبات: بما أن

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n$$

$$\Rightarrow g(x+y,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)t^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)t^m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(y)t^k$$

$$= \sum_{m,k=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_k(y)\, t^{m+k}$$

نضع $m+k=n, -\infty < n < +\infty$ فإن:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_{n-m}(y)\, t^n$$

$$\Rightarrow J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_{n-m}(y).$$

وهي الخاصية الأولى. لإثبات الخاصية الثانية نضع $n=0$ في الخاصية الأولى نجد أن :

$$J_0(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)J_{-m}(y)$$

$$= J_0(x)J_0(y) + \sum_{m=-\infty}^{-1} J_m(x)J_{-m}(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} J_m(x)J_{-m}(y)$$

$$= J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{m=1}^{+\infty} J_m(x)J_{-m}(y).$$

برهان العلاقة التكرارية (e): باستخدام التابع المولد و المبرهنة أعلاه نجد أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\, t^k$$

إذا بتفاضل طرفي العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير t نجد أن:

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, J_k(x)\, t^{k-1}$$

$$\frac{x}{2}(1+\frac{1}{t^2}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\, t^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\, J_k(x)\, t^{k-1}$$

بمساواة معامل t^{k-1} في الطرفين نحصل على :

$$\frac{x}{2}\, J_{k-1}(x) + \frac{x}{2}\, J_{k+1}(x) = kJ_k(x)$$

بذلك يكون :

$$J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x) - J_{k-1}(x).$$

برهان العلاقة التكرارية (f):

بتفاضل طرفي الدالة المولدة بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \acute{J}_k(x)\, t^k$$

$$\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\, t^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \acute{J}_k(x)\, t^k$$

بمساواة معامل t^k في الطرفين نحصل على :

$$\acute{J}_k(x) = \frac{1}{2}[\, J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)].$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

4.5. القيم الذاتية و الدوال الذاتية: (Eigenvalues and eigen functions)

ندرس الآن مسألة القيم الذاتية لمعادلة بيسيل :

$$\begin{cases} x^2\acute{y} + x\acute{y} + (\lambda x^2 - k^2)y = 0, & 0 < x < l, \quad k = 0,1,2 \dots \\ y(l) = 0 \end{cases}$$

أولاً : في حالة $\lambda = 0$ نحصل على :

$$x^2\acute{y} + x\acute{y} - k^2 y = 0 \qquad (7)$$

و هي معادلة أويلر و يكون حلها في صورة :

$y = a\, x^{\alpha}$, a ثابت

بالتعويض في المعادلة (7) نحصل على :

$$a[\alpha(\alpha-1) + \alpha - k^2]x^{\alpha} = 0 \Longrightarrow a[\alpha^2 - k^2] = 0 \Longrightarrow \alpha = \mp k$$

إذاً الحل يكون في صورة :

$$y = ax^k + bx^{-k}, \qquad k \neq 0$$

و حيث أن y مستمرة في الفترة $[0, l]$ إذاً يكون $b = 0$ و بذلك فإن :

$$y = ax^k, \qquad k \geq 1.$$

و حيث أن $y(l) = 0$ ينتج أن :

$$\Longrightarrow al^k = 0, \quad k \geq 1.$$

و بذلك يكون :

$$a = 0$$

و بما أن $a = b = 0$ إذاً $y \equiv 0$ هذا يعنى أنه لا توجد قيم ذاتية صفرية.

ثانياً : في حالة $\lambda < 0$:

بقسمة معادلة بيسيل على x ينتج أن :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$(x\acute{y})' + \left(\lambda x - \frac{k^2}{x}\right)y = 0$$

و بذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة على صورة :

$$(x\acute{y})' + \left(\lambda x - \frac{k^2}{x}\right)y = 0$$

بضرب الطرفين في y والمكاملة من 0 إلى l نجد أن :

$$\int_0^l (x\acute{y})' y dx + \lambda \int_0^l xy^2 dx - k^2 \int_0^l \frac{y^2}{x} dx = 0$$

$$\Longrightarrow xy^2|_0^l - \int_0^l x(\acute{y})^2 dx + \lambda \int_0^l xy^2 dx - k^2 \int_0^l \frac{y^2}{x} dx = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda \int_0^l xy^2 dx = \int_0^l x(\acute{y})^2 dx + k^2 \int_0^l \frac{y^2}{x} dx > 0$$

لاحظ أن الطرف الأيمن أكبر من الصفر وبذلك يكون الطرف الأيسر أيضاً موجب وهذا يعني أن $\lambda \not< 0$ وهذا يناقض فرض أن $\lambda < 0$ إذاً لا توجد قيم ذاتية سالبة.

ثالثاً : في حالة $\lambda > 0$:

بوضع $\lambda = \alpha^2$ نجد أن :

$$x^2\acute{\acute{y}} + x\acute{y} + (\alpha^2 x^2 - k^2)y = 0$$

نضع $z = \alpha x$ ينتج أن :

$$\frac{z^2}{\alpha^2}\acute{\acute{y}} + \frac{z}{\alpha}\acute{y} + (z^2 - k^2)y = 0, \qquad \acute{y} = \frac{dy}{dz}$$

وبذلك يكون الحل على صورة :

$$y = J_k(z) = J_k(\alpha x)$$

من الشرط الابتدائي $y(l) = 0$ نجد أن:

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$J_k(\alpha l) = 0.$

الآن نفرض ان β_n هى أصفار دالة بيسيل $J_k(x)$ أي أن :

$$J_k(\beta_n) = 0, \quad n = 1,2, \ldots \quad , k = 0,1,2, \ldots \ldots$$

هذا يؤدى إلى أن :

$$\alpha_n l = \beta_n \Longrightarrow \alpha_n = \frac{\beta_n}{l}$$

بذلك ينتج أن القيم الذاتية هي:

$$\lambda_n = (\frac{\beta_n}{l})^2$$

والحلول (الدوال الذاتية المناظرة) هي:

$$y_n(x) = J_k(\alpha_n x), \quad n = 1,2, \ldots \ldots \quad , k = 0,1,2, \ldots$$

5.5. التمثيل التكاملي لدوال بيسيل

: (The integral representation of Bessel functions)

للحصول على التمثيل التكاملي للتابع $y_n(x)$ نضع $t = e^{i\varphi}, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ في التابع المولد نجد أن :

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2isin\,\varphi$$

$$\Longrightarrow g(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{ix\,sin\,\varphi} \qquad (8)$$

و من ناحية أخرى لدينا :

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\varphi} \qquad (9)$$

من (8), (9) ينتج أن :

$$e^{ix\,sin\,\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)e^{in\varphi} \qquad (10)$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

بضرب طرفي العلاقة (10) في $e^{-im\varphi}$ و المكاملة بالنسبة إلى φ من π – إلى π نجد أن :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - m\varphi)}d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi}d\varphi$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)2\pi\delta_{nm} := 2\pi J_m(x),$$

حيث δ_{nm} هى دالة ديراك و إننا استخدمنا بعض خواص هذه الدالة أي أن :

$$\int e^{ikx}dk = \int e^{-ikx}dk = 2\pi\delta x.$$

بذلك نحصل على صيغة التمثيل التكاملي أي أن :

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - m\varphi)}d\varphi \qquad (11)$$

مثال 1 : أثبت صحة العلاقات الرياضية الآتية :

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[x\sin\varphi - m\varphi]d\varphi, \qquad J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[x\sin\varphi]d\varphi$$

الحل : نستخدم العلاقة (11) و العلاقة الآتية :

$$e^{i(x\sin\varphi - m\varphi)} = cos[x\sin\varphi - m\varphi] + isin[x\sin\varphi - m\varphi]$$

وذلك بمساواة الجزئيين الحقيقيين ثم التخيليين نحصل على:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos[x\sin\varphi - m\varphi] + isin\,[x\sin\varphi - m\varphi])\,d\varphi$$

$$\Longrightarrow J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos[x\sin\varphi - m\varphi]d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[x\sin\varphi - m\varphi]\,d\varphi$$

كذلك :

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin[x\sin\varphi - m\varphi]d\varphi = 0$$

بوضع $m = 0$ في العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[x\sin\varphi]d\varphi.$$

6.5. أمثلة (Examples) :

مثال 1 :أوجد قيمة $J_{\frac{3}{2}}(x)$.

الحل: بوضع $k = \frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية الآتية :

$$J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}J_k(x) - J_{k-1}(x)$$

نحصل على:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

بما إنه لدينا :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

فإن :

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right].$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

مثال 2: برهن أن:

$$(1) \qquad \int x^k J_{k-1}(x)dx = x^k J_k(x) + C$$

$$(2) \qquad \int x^{-k} J_{k+1}(x)dx = -x^{-k} J_k(x) + C$$

الإثبات :

بتكامل العلاقة التكرارية $\frac{d}{dx}[x^k J_k(x)] = x^k J_{k-1}(x)$ نحصل على :

$$\int x^k J_{k-1}(x)dx = x^k J_k(x) + C$$

وهو المطلوب الأول. الأن بتكامل العلاقة التكرارية $\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(x)] = -x^{-k} J_{k+1}(x)$ نحصل على :

$$\int x^{-k} J_{k+1}(x)dx = -x^{-k} J_k(x) + C$$

مثال 3: برهن أن

$$\int x^4 J_1(x)\, dx = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C$$

الإثبات: لدينا

$$\int x^4 J_1(x)\, dx = \int x^2 (x^2 J_1(x)\, dx)$$

بإجراء عملية التكامل بالتجزئة لذلك نفرض أن:

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2x\, dx \quad , \quad dv = x^2 J_1(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow v = \int x^2 J_1(x)\, dx = x^2 J_2(x).$$

إذا يكون :

$$\int x^4 J_1(x)\, dx = x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)\, dx$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

$$= x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C.$$

مثال 4 : برهن أن

$$(i) \qquad \frac{d}{dx}\left(x\, J_1(x)\right) = x\, J_0(x)$$

$$(ii) \quad \int_0^b x\, J_0(ax)\, dx = \frac{b}{a}\, J_1(ab).$$

الإثبات : (i) بوضع $k = 1$ في العلاقة التكرارية :

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\, J_k(x)\right) = x^k\, J_{k-1}(x)$$

نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left(x\, J_1(x)\right) = x\, J_0(x).$$

(ii) الآن بوضع $ax = t$ فإن $a\, dx = dt$ و عندما $x = 0$ فإن $t = 0$ و كذلك عندما $x = b$ فإن $t = ab$ فيكون :

$$\int_0^b x\, J_0(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} t\; J_0(t)\, dt$$

و حيث أن $t\; J_0(t) = \frac{d}{dt}(t\; J_1(t))$ فنحصل على :

$$\int_0^b x\, J_0(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{ab} \frac{d}{dt}(t\; J_1(t))\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2}[t\; J_1(t)]|_0^{ab}$$

$$= \frac{b}{a}\, J_1(ab).$$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

7.5. تمارين (Exercises)

1- برهن أن

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\frac{\cos\ x + x \sin x}{x}\right].$$

2- برهن باستخدام العلاقات التكرارية أن :

(i) $\quad \grave{J_0} = -J_1$

(ii) $\quad J_2 - J_0(x) = 2\,\grave{J_0}.$

(iii) $\quad 1 = J_0(x) + 2\,J_2(x) + 2\,J_4(x) + \cdots$

(iv) $\quad J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \cdots = \sin\ x\ .$

3- أوجد قيمة $J_3(x)$ بدلالة $J_0(x)$ و $J_1(x)$.

4- أوجد قيمة كل من :

(i) $\quad \int x^3 J_2(x)\,dx$

(ii) $\quad \int_b x^2 J_0(x)\,dx$

(iii) $\quad \int_a x\,J_0(ax)\,dx.$

5- برهن صحة العلاقات الآتية :

(i) $\quad \frac{d}{dx}[x^k J_k(x)] = x^k J_{k-1}(x).$

(ii) $\quad x\grave{J_k}(x) = -kJ_k(x) + xJ_{k-1}(x).$

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

المراجع *Bibliography*

[1] الدوال الخاصة . تأليف د. الزوام أحمد دلة , د. عمر عاشور عبد الونيس , د. محمد مختار عريبي *(2004)*

[2] مقدمة في الدوال الخاصة . تأليف د. على أحمد ضو و د. محمود توفيق (2007) .

[3] التوابع الخاصة *(* الدوال الخاصة*)* . تأليف الأستاذ الدكتور عبد الله حسين موسى الطبعة الأولى *(2011)*

[4] د. إبراهيم ديب سرميني، د. مصطفى خليل دملخي، د.سعدون إبراهيم عثمان، مقدمة في المعادلات التفاضلية – قسم الرياضيات - كلية العلوم- جامعة الملك سعود-1422هـ (2001).

[5] بعض الدوال الخاصة و تطبيقاتها في الفيزياء . Some Special Functions and their Applications in Physics,

أ.د. إبراهيم محمود أحمد ناصر: أستاذ الفيزياء النظرية. جامعة الملك فهد للبترول و المعادن, الظهران, المملكة العربية السعودية و د. عفاف السيد عبد الهادي : أستاذ الفيزياء النظرية المشارك , الجامعة المصرية الصينية , القاهرة , ج. م. ع .

[6] حسن مصطفى العويضي وآخرون، 2005، **المعادلات التفاضلية (الجزء الثاني)**، مكتبة الرشد

[7] الدوال الخاصـــــة (Special Functions)

i. Emil Shoukralla, Menoufia University, Department of Mathematics and Physics, Research information (2018).

[8] W. W. BELL . Special functions for Scientists and engineers (1968), Van Nostrand Company Ltd, London.

[9] C. Brezinski, Padé-type: Approximation and General Orthogonal Polynomials, volume 50 of ISNM Birkhäuser -Verlag, Basel (1980).

[10] Albert L. Rabenstein, Introduction to Ordinary Differential Equations,(2^{nd} edition) Academic Press, New York and London (1972).

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

السيرة الذاتية للمؤلفة Authors Curriculum Vitae

الاسم : د. سميرة الأمين محمد سليمان

الجنسية : ليبية / الحالة الاجتماعية : متزوجة

الدرجة العلمية : أستاذ مشارك

تاريخ الميلاد :1979/01/03

رقم الهاتف : 0911789791

جهة العمل : جامعة الزاوية /كلية العلوم/ قسم الرياضيات

البريد الإلكتروني :

samira.sulaiman@zu.edu.ly أو samira.sulaiman@gmail.com

منذ سبتمبر 2020 أستاذ مشارك في جامعة الزاوية / كلية العلوم/ قسم الرياضيات.

منذ سبتمبر 2016 أستاذ مساعد في جامعة الزاوية / كلية العلوم/ قسم الرياضيات.

من 2013 إلى 2016 محاضر في جامعة الزاوية / كلية العلوم/ قسم الرياضيات.

من 2008 إلى 2012 دكتوراه في الرياضيات باللغة الفرنسية في جامعة رين 1 بفرنسا.

تاريخ مناقشة الدكتوراه : 26 سبتمبر 2012.

في سنة 2006- 2007 ماجستير في الرياضيات باللغة الفرنسية في جامعة نانسى 1 بفرنسا.

تاريخ مناقشة الماجستير : 2007/07/10

في سنة 2005- 2006 دورات في اللغة الفرنسية في معهد كافيلام في فيشي بفرنسا.

من سنة 2000 إلى 2005 معيدة في قسم الرياضيات/ كلية العلوم / جامعة الزاوية.

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS

في سنة 2000 بكالوريوس في الرياضيات /كلية العلوم/ جامعة الزاوية.

في سنة 1996 ثانوية عامة في مدرسة الضياء بالزاوية في ليبيا.

أجيد اللغات الأتية :

اللغة العربية : ممتاز

اللغة الانجليزية : متوسط

اللغة الفرنسية : ممتاز

الاشراف العلمي و المناقشات العلمية :

1- تم الاشراف على عدة مشاريع لطلبة الدراسات الجامعية للحصول على البكالوريوس.

2- تم تدريس طلبة الدراسات العليا بالجامعة.

3- الاشراف على طلبة الماجستير في المعادلات غير الخطية في مجال ميكانيكا الموائع.

المواد التي قمت بتدريسها :

أولاَ: المرحلة الجامعية :

رياضة 1 – رياضة 2- رياضة 3 – أسس الرياضيات – ميكانيكا الموائع – معادلات تفاضلية جزئية – طرق رياضية – ميكانيكا تحليلية – أستاتيكا – تحليل مركب – تحليل حقيقي – معادلات تكاملية – مصطلحات رياضية.

ثانياَ : مرحلة الدراسات العليا :

معادلات تفاضلية عادية – تحليل دالي .

حقوق الطبع محفوظة لمركز العلوم و التقنية للبحوث و الدراسات
All rights reserved to the Science and Technology Caner for Research and Studies STC-RS